

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 41 • HEFT 3 • 1942

Über den Wirkungsquerschnitt einiger Elemente für langsame Neutronen

Von K.-Heinz Lauterjung

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Köln)

(Mit 4 Abbildungen)

A. Einleitung

In einer Reihe von Arbeiten (u. a. ^{1,2}) sind Absorption und Streuung der meisten Elemente für langsame und schnelle Neutronen gemessen worden. Hierbei zeigte sich, daß die Absorption nach einem Exponentialgesetz erfolgt. Es läßt sich also ein Absorptionskoeffizient angeben. Zur Charakterisierung des Verhaltens der verschiedenen Elemente gegen Neutronen gibt man den atomaren Wirkungsquerschnitt, gemessen in 10^{-24} cm², an.

Die Nachweismethoden hierfür sind verschieden. Einmal kann die Absorption der langsamen Neutronen aus der in einem Indikator durch Einfangung erzeugten künstlichen Radioaktivität gemessen werden. Zum anderen können die beiden Umwandlungsprozesse $B^{10}(n, \alpha)Li^7$ und $Li^6(n, \alpha)He^3$ zum Nachweis benutzt werden, indem die α -Teilchen und die Rückstoßkerne in den gebräuchlichen Anordnungen nachgewiesen werden.

Wie Goldhaber und Briggs (3) feststellten, liegt der Streuquerschnitt der meisten Elemente zwischen 1 und $15 \cdot 10^{-24}$ cm². Dagegen ist der Absorptionsquerschnitt der Elemente in weiten Grenzen verschieden.

In der vorliegenden Arbeit wurde auf Grund der Versuchsanordnung der totale Wirkungsquerschnitt, also die Summe aus Absorptions- und Streuquerschnitt, einiger Elemente für langsame Neutronen gemessen. Und zwar wurden untersucht: Gallium, Germanium als GeO_2 , Rubidium als RbJ , Indium, Caesium als $CsCl$ und Hafnium als HfO_2 .

B. Versuchsanordnung

Die Neutronen werden aus dem Prozeß $D(D,n)He^3$ gewonnen, indem ein Deuteronenstrahl mit einer Energie von 200 ekV und einer Stromstärke von 15 Mikroampere auf eine Schicht von schwerem Eis trifft. Diese befindet sich in einem Ansatzstück, welches mit

4 Schrauben durch eine Gummidichtung am Nachbeschleunigungsrohr befestigt wird. Um trotz der bei der Beschießung auftretenden Wärme die Eisschicht konstant zu halten, wird ihre Unterlage, die aus einer 3 cm großen Kupferscheibe mit angelötetem Kupferstab besteht, in flüssiger Luft gekühlt (Abb. 1). Das Vorratsgefäß faßt

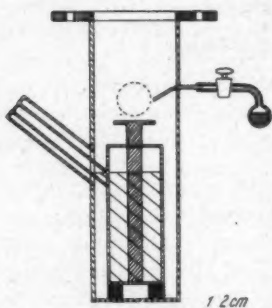


Abb. 1. Anordnung für die Kühlung von schwerem Eis

300 cm³ flüssige Luft, Außerdem sind die Gefäßwände zur Vermeidung von Aufnahme von Strahlungswärme poliert. In diesen Raum ragt ein Röhrchen, das mit einem Vorratsgefäß von schwerem Wasser verbunden ist und durch einen Hahn abgesperrt wird. Die Öffnung des Röhrchens zeigt von schräg oben auf die Kupferplatte. Der Dampfstrahl trifft auf die gekühlte Kupferscheibe und schlägt sich als Eisschicht nieder. Durch ein Glasfenster in der Wand kann von außen die Scheibe beobachtet werden. Mit dieser Anordnung war es möglich, 1 Std. lang eine Schicht von schwerem

Eis von genügender Dicke zu halten.

An dem Kühlgefäß läßt sich leicht eine im Entladungsrohr evtl. auftretende Undichte feststellen. In diesem Fall steigt bei abgeschaltetem Kanalstrahl aus dem Füllansatz für flüssige Luft ein feiner Strahl kondensierten Wasserdampfes. Gleichzeitig verschwindet die scharfe Abgrenzung eines Eisringes, der sich für gewöhnlich am oberen Ende des Füllrohres bildet.

Die beim Prozeß entstehenden schnellen Neutronen werden nach ihrem Austritt durch einen das Ansatzstück umgebenden Paraffinmantel von 6 cm Dicke und einen 6 cm dicken Boden auf die Geschwindigkeit der thermischen Neutronen verlangsamt.

Der Nachweis der thermischen Neutronen geschieht in einer Ionisationskammer, die mit BF₃ von einem Druck von 100 cm Hg gefüllt ist (Abb. 2).

Die Außenelektrode der Kammer ist ein Messingrohr von einem Durchmesser von 32 mm mit halbkugelförmiger Stirnwand. Ein Messingstab von 11,5 cm Länge und 4 mm Durchmesser mit einer axialen Durchbohrung zum Füllen bildet die Innenelektrode. Die Isolation besteht aus einer Hartgummischeibe, auf die innen und außen je ein Erdungsring aufgesetzt ist. Die beiden Erdungsringe sind durch ein Drähtchen mit einander verbunden. Durch einen Schraubring werden Innenelektrode und Hartgummischeibe gegen

einen Anschlag im Inneren der Zylinderelektrode gepreßt. Um eine Zersetzung des Hartgummis durch das BF_3 zu verhindern, wurde die Hartgummioberfläche innen mit Picein überzogen. Außerdem wurde außen noch Picein zur Abdichtung aufgetragen. Nach dem Füllen der Kammer wurde die Fülleitung aus dünnem Kupferrohr

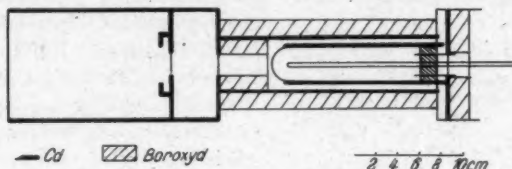


Abb. 2. Blenden und Ionisationskammer

zugequetscht, abgesägt und die Schnittfläche verlötet. Bis auf eine Blendenöffnung von 2 cm Durchmesser vor der Stirnwand ist die Ionisationskammer allseitig von Cadmiumblech umgeben, um die thermischen Neutronen abzufangen. Außerdem umgibt ein Boroxydmantel von 2 cm Dicke die Kammer allseitig bis auf die Blendenöffnung.

Dieser Mantel hat den Zweck, die noch übriggebliebenen schnelleren Neutronen, die aus dem Raume gestreut sind, abzufangen. Damit gelangen im wesentlichen nur thermische Neutronen durch die Blendenöffnung in die Ionisationskammer.

Im Kammervolumen können die Neutronen mit den Boratomen des Kammergases folgenden Kernprozeß eingehen: $\text{B}^{10}(n, \alpha)\text{Li}^7$. Die Alphateilchen mit einer Reichweite von 8 mm in Luft von 760 mm Hg und 0°C und die Rückstoßkerne von Li^7 ionisieren die Kammergasfüllung. Bei einer negativen Spannung am Gehäuse der Kammer wird auf die Stabelektrode eine negative Ladungsmenge transportiert. Um registriert werden zu können, muß dieser schwache Spannungstoß weiter verstärkt werden. Zur Erzielung einer hohen Intensität ist es vorteilhaft, den Druck des Kammergases möglichst hoch zu wählen.

Die Spannung am Kammergehäuse betrug 1300 Volt.

Zur Erzielung einer guten Geometrie wurde die Kammer in einem Abstand von dem Paraffinblock aufgestellt, so daß die Blende 15 cm vom Paraffinblock entfernt war. Um ein nicht axiales Eindringen von im Raume gestreuten Neutronen und damit schiefen Durchtritt durch die absorbierende Schicht zu vermeiden, wurde vor die Blende ein 15 cm langes und 10 cm weites Rohr aus Cadmiumblech gesetzt. Die Lage des zu untersuchenden Absorbers vor der

Blende ist genau definiert. Die Anordnung bewirkt, daß die Absorberschicht nahezu senkrecht von Neutronen durchlaufen wird. Der bei dieser Geometrie vorkommende äußerste Einfallswinkel von 18° für schiefen Durchtritt läßt eine Korrektur unnötig erscheinen.

Die Absorber wurden für die Messung in flache Aluminiumdosen gefüllt (Abb. 3), deren Innendurchmesser je nach der vor-

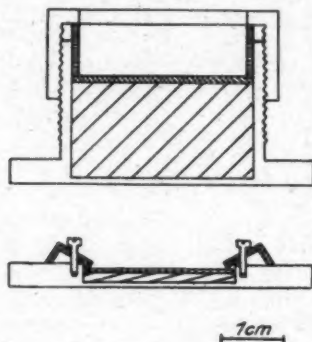


Abb. 3. Absorptionsgefäße

handenen Substanzmenge 25 oder 30 mm beträgt. Die Bodendicke ist bei allen Aluminiumdosen innerhalb der Fehlergrenze gleich. Die Aluminiumdosen werden mit einem dünnen Deckel aus Aluminium oder Quarz verschlossen. Bei den größeren Dosen wird der Deckel mit Ringen auf die Substanz gedrückt. Bei den kleineren Dosen wird der Deckel durch einfache Schraubklemmen gehalten.

Die Verstärkeranordnung entspricht der von O. Laaffan anderer Stelle (8) beschriebenen.

Die am Anodenwiderstand der Endstufe des Verstärkers auftretenden Spannungsstöße beim Eintreten eines Kernumwandlungs-

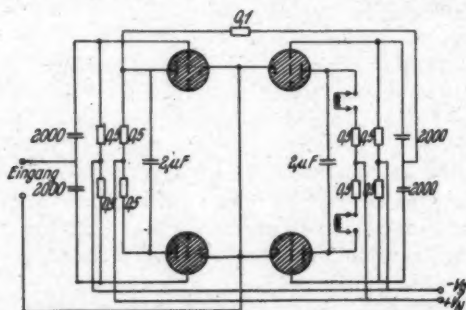


Abb. 4. Zählwerk mit 4 facher Übersetzung

prozesses in der Ionisationskammer mußten nun registriert werden. Zum richtigen Einstellen des Verstärkers und zur späteren Kontrolle während der Meßreihen wurde eine Braunsche Röhre angeschaltet. Die beiden Platten des einen Plattenpaares liegen an den Enden des Anodenwiderstandes, die beiden anderen sind geerdet. Die eigent-

liche Registrierung geschieht durch ein automatisches Zählwerk mit 4facher Untersezung (Abb. 4).

Die Kapazitäten sind in pF angegeben, die Widerstände in k Ω . Die Gastrioden sind Valvo 4690.

Das Zählwerk ist ein umgebauter Wecker, an dessen Steigrad ein Eisenplättchen gelötet ist. Dieses kann sich zwischen den Polen zweier kleiner Elektromagnete hin und her bewegen. Die Spulen des Zählwerks liegen in je einem Anodenkreis der beiden letzten Gastrioden. Das Sekundenzifferblatt ist in 100 Teile geteilt. Der Sekundenzeiger springt bei einmaligem Hin- und Hergehen um zwei halbe Teilstriche weiter. Das Auflösungsvermögen des Zählwerks wurde vorher mit einer 20 teiligen Kontaktscheibe zu $\frac{3}{100}$ Sek. bestimmt. Bei der hohen Zahl der während der Meßreihen registrierten Teilchen wurde eine Korrektur dieser Zahlen notwendig.

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dW für das Eintreffen eines Ereignisses in dem Zeitelement dt zu

$$(1) \quad dW = \frac{1}{t_0} \cdot e^{-\frac{t}{t_0}} \cdot dt.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das erste Ereignis in der Zeit $t = t'$ eintritt, ist dann

$$(2) \quad W_1(t') = \frac{1}{t_0} \int_0^{t'} e^{-\frac{t}{t_0}} \cdot dt = 1 - e^{-\frac{t'}{t_0}}.$$

Aus derselben Überlegung ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen auch des zweiten Ereignisses in der Zeit $t = t'$ gleich ist

$$(3) \quad W_2(t') = \frac{1}{t_0} \int_0^{t'} e^{-\frac{t}{t_0}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{(t'-t)}{t_0}}\right) dt = 1 - \left(1 + \frac{t'}{t_0}\right) \cdot e^{-\frac{t'}{t_0}}.$$

Hierbei bedeutet t' das Auflösungsvermögen des Zählwerks und ist $\frac{3}{100}$ Sek. t_0 ist der mittlere zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgenden Teilchen, also der Quotient aus der Zeit T , gemessen in Sekunden, und der während der Zeit T registrierten Teilchenzahl. Die Wahrscheinlichkeit $W_2(t')$ gibt dann den Bruchteil der bei dieser Registrierung unterdrückten Teilchen an. Für die Auswertung der Meßreihen ist es vorteilhaft, nicht das Auflösungsvermögen, sondern die Zahl der Teilchen pro Minute einzusetzen. Zur Vereinfachung der Korrektur wurde die Funktion in einer Kurve aufgetragen, deren Abzisse die Zahl der gezählten Teilchen pro Minute, deren Ordinate die Zahl der wirklichen Teilchen pro Minute

V
4
11
9
4
2

XUM

betrug. Mit dieser Kurve kann die Zahl der registrierten Teilchen auf den wahren Wert korrigiert werden. Da durch die Untersetzung und die Eigenart des Zählwerks bei einem einmaligen Ausfall gleich 4 Teilchen unterdrückt werden, müssen die Ordinatenwerte der Kurve mit dem Faktor 4 multipliziert werden.

Zur Prüfung des Verstärkers und der Untersetzung war an die Gitterleitung der Elektrometerröhre ein Influenzierungskondensator gelegt, dessen Ladung der Ionenmenge des Kernprozesses entsprach. Beim Kurzschließen des Kondensators erhält das Gitter einen Influenzierungsstoß, der durch den Verstärker verstärkt und bei richtiger Einstellung gezählt wird.

C. Messungen und Ergebnisse

Bezeichnet I_0 die Intensität eines Neutronenstromes ohne Absorber, so läßt sich die nach dem Durchgang durch den Absorber gemessene Intensität I durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$(4) \quad I = I_0 \cdot e^{-\Sigma}.$$

Hierin stellt Σ den Wirkungsquerschnitt pro Quadratzentimeter der Substanz dar. Um von der Schichtdecke des Absorbers unabhängig zu werden, gibt man den atomaren Wirkungsquerschnitt σ an. Zwischen beiden Größen besteht der einfache Zusammenhang:

$$(5) \quad \Sigma = N \cdot \sigma,$$

wobei N die Zahl der Atome über dem Quadratzentimeter ist. Also läßt sich der atomare Wirkungsquerschnitt ausdrücken durch die Gleichung

$$(6) \quad \sigma = \frac{\ln \frac{I_0}{I}}{N}.$$

Die Angabe geschieht in 10^{-24} cm^2 .

Da der Wirkungsquerschnitt für langsame Neutronen bestimmt werden soll, muß der durch die noch übrigbleibenden schnellen Neutronen verursachte Nulleffekt eliminiert werden. Hierzu wurde die Intensität der schnelleren Neutronen alleine durch Vorschalten einer Cadmiumschicht, die die thermischen Neutronen absorbiert, gemessen. Ist die Zahl der in der Zeit t_0 gezählten Teilchen ohne Absorber N_0 , die Zahl der in der Zeit t_A gemessenen Teilchen mit Absorber N_A , die Zahl der in der Zeit t_{Cd} gemessenen Teilchen mit vorgeschaltetem Cd-Blech N_{Cd} , so ist die unter Berücksichtigung der schnelleren Neutronen korrigierte Intensität ohne Absorber

$$(7) \quad I_0 = \frac{N_0}{t_0} - \frac{N_{Cd}}{t_{Cd}}$$

Die korrigierte entsprechende Intensität bei eingeschaltetem Absorber ist dann

$$(8) \quad I = \frac{N_A}{t_A} - \frac{N_{Cd}}{t_{Cd}}.$$

Das Verhältnis I/I_0 gibt dann den von dem Absorber durchgelassenen Bruchteil der Neutronen-Intensität I_0 an. Wird der Wirkungsquerschnitt eines Elementes an einer seiner Verbindungen bestimmt, bzw. ist der Absorber verunreinigt, so muß bei der Berechnung eine Korrektur angebracht werden, bei der die Mengen und die Wirkungsquerschnitte der anwesenden Fremdatome als bekannt vorausgesetzt werden.

Die Zahl N der Moleküle bzw. Atome über einem Quadratcentimeter des Absorbers berechnet sich zu

$$(9) \quad N = \frac{L \cdot m}{M \cdot Q}$$

wobei L die Loschmidtsche Konstante, m die Masse des Absorbers in Gramm, M das Molekular- bzw. Atomgewicht des Absorbers und Q den Querschnitt des Adsorbers in Quadratcentimetern bedeuten.

Aus der Gausschen Fehlerrechnung ergibt sich der wahrscheinliche Fehler von I_0/I zu

$$(10) \quad m \frac{I_0}{I} = \pm \sqrt{\frac{I^2 \left(\frac{N_0}{t_0} + \frac{N_{Cd}}{t_{Cd}} \right) + I_0^2 \left(\frac{N_A}{t_A} + \frac{N_{Cd}}{t_{Cd}} \right)}{I^4}}$$

Bei der Auswertung der Meßreihen wurde nicht der wahrscheinliche Fehler einer Messung sondern ihr Gewicht G berechnet. Definitionsgemäß ist

$$(11) \quad G \frac{I_0}{I} = \frac{\left(\frac{I_0}{I} \right)^2}{\left(m \frac{I_0}{I} \right)^2}$$

Der endgültige Wert von I_0/I aus n Meßreihen ist

$$(12) \quad \frac{I_0}{I} = \frac{\sum_v^n G_v \cdot \left(\frac{I_0}{I} \right)_v}{\sum_v^n G_v} \pm \frac{\frac{I_0}{I}}{\sqrt{\sum_v^n G_v}}$$

Wegen

$$(13) \quad m_{IgA} = \frac{m_A}{A}$$

wird

$$(14) \quad m_{\Sigma} = m_{\text{lg}} \frac{I_0}{I} = \frac{1}{\sqrt{\sum_v^n G_v}}$$

und damit

$$(15) \quad m_o = \frac{1}{N \sqrt{\sum_v^n G_v}}$$

Als vollständige Formel für die Bestimmung des atomaren Wirkungsquerschnittes läßt sich damit angeben

$$(16) \quad \sigma = \frac{\ln \frac{I_0}{I}}{N} \pm \frac{1}{N \sqrt{\sum_v^n G_v}}$$

Die Meßreihen sahen folgendermaßen aus: Zur Bestimmung der Nullintensität wurde wegen der gleichen Abmessung aller Dosen eine leere Dose zwischengeschaltet. Es wurden jeweils 2 Elemente in einem Meßgang bestimmt. Um eine Kontrolle über die Schwankung der Neutronen-Intensität zu haben, wurde nach jeder Absorptionsmessung eine Nullmessung eingeschaltet, außerdem wurde an drei Punkten der Meßreihe die Intensität mit vorgeschaltetem Cd-Blech gemessen. Jede dieser Einzelmessungen dauerte 1 Min. Das Schema einer Meßreihe sah folgendermaßen aus:

Cd A 0 B 0 Cd 0 B 0 A Cd.

Um einen evtl. regelmäßigen Gang der Intensität und damit eine einseitige Beeinflussung der Meßergebnisse auszuschalten, wurden in der nächsten Meßreihe die beiden Absorber A und B in ihrer Stellung gegeneinander vertauscht.

Ohne Absorptionsschicht gab die Anordnung eine Neutronen-Intensität von 400—500 Teilchen in der Minute. Der prozentuale Anteil der mit höherer als thermischer Geschwindigkeit in die Kammer eindringenden Neutronen war bei sämtlichen Meßreihen von der gleichen Größe. Im Mittel ergab sich aus sämtlichen Meßreihen ein Anteil an schnelleren als thermischen Neutronen von 24%. Die in einer Meßreihe gemessenen Null-Intensitäten zeigten, daß der Neutronenstrom während einer Meßreihe befriedigend konstant blieb.

Zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes eines Elementes wurden durchschnittlich insgesamt 45—50 000 Neutronen gezählt. Hierbei hatte die Messung ein Gewicht von mindestens 2000.

Um eine gleichmäßige Absorberdichte zu bekommen, wurden die Substanzen vor dem Einfüllen in die Aluminiumdosen in der Reibschale fein pulverisiert und dann mit großer Sorgfalt gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt. Bei den geringen Substanzmengen erlaubte das durchsichtige Quarzscheibchen eine Beurteilung der Gleichmäßigkeit.

a) Gallium

Zur Messung standen uns 1,3151 g reinstes Gallium zur Verfügung. Die Galliumscheibe wurde folgendermaßen hergestellt: Das Gallium wurde in einer Form vom Durchmesser der Aluminiumdose aus Pertinax geschmolzen. Wegen der großen Oberflächenspannung des geschmolzenen Ga gegen Pertinax blieb die Schmelze als zusammenhängender Tropfen in der Form. Wegen der Sprödigkeit von Ga ließ sich der Tropfen nicht auswalzen. Darum wurde folgendermaßen verfahren:

Da Ga gegen Quarz eine sehr viel geringere Oberflächenspannung hat, wurde der Ga-Tropfen mit einem passenden Quarzscheibchen über die ganze Fläche der Form gedrückt. Um die noch unter dem Quarzdeckel sitzenden Luftblasen zu entfernen, wurde die Schmelze ins Vakuum gebracht und durch Erschüttern von den Luftblasen befreit. So gelang es nach einiger Übung, eine blasenfreie Schmelze herzustellen, die die ganze Fläche der Form ausfüllte. Durch Justieren der Form auf einer horizontalen Unterlage ließ sich ein Scheibchen von ziemlich gleichmäßiger Dicke herstellen. Da Ga stark unterkühlt werden kann, mußte der feste Zustand durch Kühlen der Form mit flüssiger Luft hergestellt werden. Nach dem Festwerden konnte die Scheibe leicht von der Pertinaxform und dem Quarzplättchen gelöst werden.

Aus der Dichte des Ga $d = 5,907$ und dem Gewicht der Scheibe $m = 1,3151$ g berechnete sich das Volumen der Ga-Scheibe zu $222,6 \text{ mm}^3$. Durch Ausmessen mit einer Mikrometerschraube wurde die Dicke der Scheibe an mehreren Stellen bestimmt und die durchschnittliche Dicke zu $0,500 \text{ mm}$ berechnet. Damit ergab sich die Fläche der Ga-Scheibe zu $4,452 \text{ cm}^2$. Hieraus und aus dem Gewicht bestimmt sich die Masse pro Quadratzentimeter zu $m/Q = 0,295 \text{ g/cm}^2$.

Aus 16 Meßreihen ergab sich

$$\frac{I_0}{I_{\text{Ga}}} = 1,048 \pm 0,020.$$

Es ist

$$\sum_{\text{Ga}} = 0,047 \pm 0,020.$$

V
4
11
9
4
2

XUM

Mit $\frac{m}{Q} = 0,295 \text{ g/cm}^2$, $L = 6,02 \cdot 10^{23}$ und $M = 69,72$ bestimmt sich aus Gl. (9) die Zahl N der Atome über dem Quadratzentimeter zu $N = 2,55 \cdot 10^{21}$.

Aus Gl. (6) findet man damit den atomaren Wirkungsquerschnitt für Ga zu

$$\sigma_{\text{Ga}} = (18,5 \pm 7,6) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Der verhältnismäßig hohe Wert des mittleren Fehlers von 41% erklärt sich daraus, daß für den niedrigen Wert des Wirkungsquerschnittes bei der Zahl der vorliegenden Messungen eine zu geringe Substanzmenge vorhanden war. Zum Senken des Fehlers auf die Hälfte hätten wegen der Gültigkeit von

$$(17) \quad m_N = \frac{N}{V g_N}$$

4mal so viel Teilchen gemessen werden müssen.

b) Germanium

Die zur Verfügung stehende Menge reinsten Germaniumoxyds wurde über eine längere Dauer in der nicht leuchtenden Flamme geglüht. Nach dem Glühen wurde ein Gewichtsverlust von 1,1% festgestellt, der auf frei gewordenen Wasser zurückzuführen ist. Zwischen den Messungen wurde das Präparat über P_2O_5 aufbewahrt. Nach Beendigung der Meßreihen wurde keine Gewichtszunahme festgestellt. Damit erübrigte sich eine zusätzliche Korrektur für Wasser.

Zur Messung wurden $m = 2,1134 \text{ g}$ Germaniumoxyd benutzt. Bei einem Querschnitt der Aluminiumdose von $4,98 \text{ cm}^2$ ist die Masse pro Quadratzentimeter $\frac{m}{Q} = 0,415 \text{ g/cm}^2$.

Aus 19 Meßreihen ergab sich

$$\frac{I_0}{I_{\text{GeO}_2}} = 1,0767 \pm 0,187$$

und

$$\sum_{\text{GeO}_2} = 0,0733 \pm 0,0174.$$

Mit $\frac{m}{Q} = 0,415 \text{ g/cm}^2$ und $M_{\text{GeO}_2} = 72,6 + 32 = 104,6$ wird nach Gl. (10)

$$N_{\text{GeO}_2} = 2,47 \cdot 10^{21} \text{ Moleküle/cm}^2.$$

Damit ist der molekulare Wirkungsquerschnitt für langsame Neutronen von GeO_2

$$\sigma_{\text{GeO}_2} = (30,9 \pm 7,3) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Mit $\sigma_0 = 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ wird der atomare Wirkungsquerschnitt für Germanium

$$\sigma_{\text{Ge}} = (24,3 \pm 7,9) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

c) Rubidium

Rubidium war als Jodid RbJ vorhanden. Um etwa vorhandenes Wasser zu entfernen, wurde die Substanz 15 Min. lang bei einer Temperatur von $120-130^\circ$ im Ofen erhitzt. Hiernach wurde ein Gewichtsverlust von $2,3 \cdot 10^{-2} \%$ festgestellt. Es wurden 21,6306 g RbJ in eine Büchse von 30 mm Durchmesser gefüllt. Somit war die Masse pro Quadratcentimeter $\frac{m}{Q} = 3,080 \text{ g/cm}^2$.

Aus 29 Meßreihen ergab sich

$$\frac{I_0}{I_{\text{RbJ}}} = 1,202 \pm 0,021$$

und

$$\sum_{\text{RbJ}} = 0,1844 \pm 0,0170.$$

Für $\frac{m}{Q} = 3,080 \text{ g/cm}^2$ und $N_{\text{RbJ}} = 85,44 + 126,92 = 212,36$ wird nach Gl. (9) $N_{\text{RbJ}} = 8,73 \cdot 10^{21} \text{ Moleküle/cm}^2$.

Nach Gl. (6) ist der molekulare Wirkungsquerschnitt für 1 RbJ-Molekül = $(21,2 \pm 1,9) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Mit dem von Dunning⁹⁾ angegebenen Wert für den atomaren Wirkungsquerschnitt von Jod $\sigma_J = 9,4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ findet man

$$\sigma_{\text{Rb}} = (11,8 \pm 1,9) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Eine Korrektur wegen des während der Messung eventuell aufgenommenen Wassers war, wie eine Wägung nach Beendigung der Messungen zeigte, nicht erforderlich.

d) Indium

Indium war als reines Metall vorhanden. Die in einem Porzellantiegel geschmolzene Substanz wurde in einer Walze auf ein Blech solcher Dicke ausgewalzt, daß unter Berücksichtigung des zu erwartenden Querschnittes die absorbierte Intensität gleich der halben ungeschwächten war. Das Gewicht der Indiumscheibe betrug 1,9018 g. Aus der Dichte von Indium $d = 7,314$ bestimmte sich das Volumen zu 260 mm^3 . Durch Ausmessen mit einer Mikrometerschraube an mehreren Punkten wurde die durchschnittliche Dicke der Scheibe zu $0,511 \text{ mm}$ bestimmt. Damit ergab sich eine Fläche der In-Scheibe von $5,088 \text{ cm}^2$. Es ist $\frac{m}{Q} = 0,374 \text{ g/cm}^2$.

Aus 16 Meßreihen ergab sich:

$$\frac{I_0}{I_{\text{In}}} = 1,4766 \pm 0,0328,$$

und damit

$$\sum_{\text{In}} = 0,3898 \pm 0,0222.$$

Aus Gl. (9) wird mit

$$\frac{m}{Q} = 0,374 \text{ g/cm}^2 \quad \text{und} \quad M = 114,76$$

$$N_{\text{In}} = 1,96 \cdot 10^{21} \text{ Atome/cm}^2.$$

Es ist damit der atomare Wirkungsquerschnitt für Indium

$$\sigma_{\text{In}} = (198,6 \pm 11,3) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

e) Caesium

Zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes standen uns 10,0292 g Caesiumchlorid zur Verfügung.

Ein Erhitzen der Substanz auf 120—130° über einen längeren Zeitraum gab keinen Gewichtsverlust. Auch ließ sich nach den Messungen keine Gewichtszunahme feststellen.

Aus der Masse und der Fläche $Q = 7,03 \text{ cm}^2$ findet man

$$\frac{m}{Q} = 1,426 \text{ g/cm}^2.$$

Aus 29 Meßreihen ergab sich:

$$\frac{I_0}{I_{\text{CsCl}}} = 1,5787 \pm 0,0303$$

und

$$\sum_{\text{CsCl}} = 0,4566 \pm 0,0192.$$

Mit dem Molekulargewicht von CsCl

$$M = 168,37 \quad \text{und} \quad \frac{m}{Q} = 1,426 \text{ g/cm}^2$$

wird

$$N_{\text{CsCl}} = 5,10 \cdot 10^{21} \text{ Moleküle/cm}^2.$$

Es ist der molekulare Wirkungsquerschnitt von CsCl

$$\sigma_{\text{CsCl}} = (89,5 \pm 3,8) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Mit dem von Dunning⁹⁾ angegebenen Wert für $\sigma_{\text{Cl}} = 39 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ wird der atomare Wirkungsquerschnitt von Caesium

$$\sigma_{\text{Cs}} = (50,5 \pm 3,8) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

f) Hafnium

Hafnium wurde in Form des Oxydes HfO_2 mit einer Reinheit von 92,2% untersucht. Die zur Verfügung stehende Menge wurde über einen längeren Zeitraum auf eine Temperatur von 400° erhitzt, ohne daß nachher ein Gewichtsverlust festzustellen war. Die Masse des Absorbers war $m = 1,0007$ g auf einer Fläche von 4,98 cm², also $\frac{m}{Q} = 0,201$ g/cm².

Aus 19 Meßreihen ergab sich:

$$\text{und} \quad \frac{I_0}{I_{\text{HfO}_2}} = 1,1029 \pm 0,0190$$

$$\text{Mit} \quad \sum_{\text{HfO}_2} = 0,0979 \pm 0,0172.$$

$$\text{wird} \quad M_{\text{HfO}_2} = 210,6 \quad \text{und} \quad \frac{m}{Q} = 0,201 \text{ g/cm}^2$$

$$\text{und damit unkorrigiert} \quad N_{\text{HfO}_2} = 5,75 \cdot 10^{20} \text{ Moleküle/cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{HfO}_2} = (170,4 \pm 29,9) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Unter Berücksichtigung von $\sigma_0 = 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ wird der unkorrigierte, atomare Wirkungsquerschnitt von Hafnium

$$\sigma_{\text{Hf}} = (163,8 \pm 29,9) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Bei HfO_2 wurde nach Abschluß der Messungen keine Gewichtszunahme durch Wasser festgestellt. Damit war eine Korrektur für Wasser als Verunreinigung unnötig. Dagegen mußte eine Korrektur wegen der 92,2%igen Reinheit des Oxydes vorgenommen werden.

D. Diskussion der Ergebnisse

Der in der Arbeit für Germanium gemessene Wert von

$$\sigma = 24,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

unterscheidet sich erheblich von dem von Dunning und Mitarbeitern²⁾ angegebenen Wert von ungefähr $75 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Auch bei ihnen wurde an GeO_2 gemessen. In unserem Falle war durch Erhitzen ein Gewichtsverlust von 1,1% eingetreten, der als von abgegebenem Wasser herrührend angenommen wurde. Möglicherweise ist der Dunningsche Wert teilweise durch Wasser als Verunreinigung zustande gekommen. Legt man unseren Wert für $\sigma_{\text{Ge}} = 24,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ und für Wasser $\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 79 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ zugrunde, so müßten in der Dunningschen Schicht $10,2 \pm 1,5\%$ Wasser vorhanden gewesen sein, um zu dem Wert von $75 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ zu kommen.

Hierbei ist allerdings die Fehlergrenze des Dunningschen Wertes unberücksichtigt gelassen. Wegen der geringen Absorption der Schicht von 0,07 kann sein Wert außerdem noch mit einem beträchtlichen mittleren Fehler behaftet sein. Nimmt man für den Dunningschen Wert den gleichen prozentualen Fehler wie bei uns an, so könnten $10,2 \pm 2,4\%$ Wasser den hohen Wirkungsquerschnitt vorgetäuscht haben. Bei noch geringerer Meßgenauigkeit genügen schon niedrigere Gewichtsteile Wasser, um zu dem hohen Wert zu kommen.

Bethe⁹⁾ hat eine Formel angegeben, die die Abhängigkeit des Absorptionsquerschnittes von der Energie der Neutronen ausdrückt.

Sie lautet:

$$(18) \quad \sigma = \sigma_0 \cdot \left(\frac{E_r}{E} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{E_r - E}{1/2 \Gamma} \right)^2}$$

Hierin bedeutet σ_0 den Absorptionsquerschnitt an der Resonanzstelle in 10^{-24} cm^2 , E_r die Energie der Resonanzneutronen in eV, Γ die Halbwertsbreite der Resonanzstelle in eV, E die Energie der Neutronen in eV und σ den zugehörigen Absorptionsquerschnitt in 10^{-24} cm^2 .

Diese Formel gilt nur dann, wenn ein Resonanzniveau des Kernes in der Nähe der thermischen Energien vorhanden ist. Da dies für Indium zutrifft, findet die Formel Anwendung. Die in der Literatur als Resonanzenergie angegebenen Werte weichen teilweise ziemlich voneinander ab. So schien es wünschenswert, einmal mit unserem Wert $\sigma_{\text{In}} = 198,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ für thermische Neutronen nach Formel (18) die Resonanzenergie E_r zu berechnen. Hierbei wurde die Energie der thermischen Neutronen $E = 0,026 \text{ eV}$ gesetzt. Für σ_0 und Γ wurden nach Hornbostel und Goldsmith¹⁰⁾ gesetzt

$$\sigma_0 = 23000 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \text{und} \quad \Gamma = 0,07 \text{ eV}.$$

Mit diesen Werten wurde aus (18) die Energie der Indium-Resonanzneutronen zu

$$E_r = 0,05 \text{ eV}$$

bestimmt.

Die Reinheit des von uns benutzten HfO_2 ist mit 92,2% angegeben. Wegen der außerordentlichen Ähnlichkeit zwischen Hafnium und Zirkonium dürfen die restlichen 7,8% als ZrO_2 angenommen werden. Somit bedarf der von uns gefundene Wert für HfO_2 einer Korrektur. Hierzu wollen wir den Dunningschen Wert⁸⁾ für Zr $\sigma = 16,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ benutzen. Unter der Annahme, daß das Dunningsche Präparat in seiner Reinheit derjenigen einiger Zirkoniumpräparate zur Atomgewichtsbestimmung entsprach, wird nach v. Hevesy¹¹⁾ ein Hafniumgehalt von 2% angesetzt. Zur Korrektur

Ordn.
Zahl

31
32
37
40
55

72

kann man also zwei Gleichungen aufstellen. Die eine enthält den Dunningschen Wert für ZrO_2 und die angenommene Verunreinigung von 2% HfO_2 , die andere enthält unseren unkorrigierten Wert von HfO_2 und die Verunreinigung von 7,8% ZrO_2 . Aus diesen beiden Gleichungen findet man die korrigierten Werte für Zr und Hf. Es ist danach

$$\sigma_{\text{Hf}} = (175,4 \pm 29,0) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

und

$$\sigma_{\text{Zr}} = 15,0 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

E. Zusammenfassung

Es wird eine Hochspannungsanlage zur Erzeugung von Neutronen aus dem $D+D$ -Prozeß beschrieben. Der Nachweis der thermischen Neutronen geschieht in einer Ionisationskammer, die mit BF_3 gefüllt ist. Die Registrierung der am Ausgang eines Verstärkers erzeugten Spannungstöße geschieht durch ein Zählwerk mit 4facher Untersezung.

Mit der Versuchsanordnung wird der Wirkungsquerschnitt einiger Elemente für thermische Neutronen gemessen. Untersucht werden: Gallium, Germanium als GeO_2 , Rubidium als RbJ , Indium, Caesium als CsCl und Hafnium als HfO_2 .

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Versuchsergebnisse. In der ersten Spalte steht die Ordnungszahl des untersuchten Elementes, in der zweiten das Element, die dritte Spalte gibt die Verbindung an, in der das Element untersucht wurde. Die vierte Spalte enthält die Masse des Absorbers über dem Quadratzentimeter. In der fünften Spalte steht das Verhältnis der geschwächten zur ungeschwächten Neutronenintensität. Die sechste Spalte enthält den Wirkungsquerschnitt pro Quadratzentimeter der in Spalte 3 stehenden Substanz, Spalte 7 den molekularen, bzw. atomaren Wirkungsquerschnitt der untersuchten Substanz. In der achten Spalte steht der atomare Wirkungsquerschnitt des Elementes in 10^{-24} cm^2 .

Ordn.-Zahlen	Element	Verbindung	g/cm^3	I_0/I	Σ	σ in 10^{-24} cm^2 (Verbindung)	σ in 10^{-24} cm^2 (Element)
31	Ga	Ga	0,295	$1,048 \pm 0,020$	$0,0472 \pm 0,0195$	$18,5 \pm 7,6$	$18,5 \pm 7,6$
32	Ge	GeO_2	0,415	$1,0767 \pm 0,187$	$0,0733 \pm 0,0174$	$30,9 \pm 7,3$	$24,3 \pm 7,3$
37	Rb	RbJ	3,080	$1,202 \pm 0,021$	$0,1844 \pm 0,0170$	$21,2 \pm 1,9$	$11,8 \pm 1,9$
49	In	In	0,374	$1,4766 \pm 0,0328$	$0,3898 \pm 0,0222$	$198,6 \pm 11,3$	$198,6 \pm 11,3$
55	Cs	CsCl	1,426	$1,5787 \pm 0,0303$	$0,4566 \pm 0,0192$	$89,5 \pm 3,8$	$50,5 \pm 3,8$
72	Hf	HfO_2	0,201	$1,1029 \pm 0,0190$	$0,0979 \pm 0,0172$	<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> <div style="text-align: center;">unkorr. 170,4 \pm 29,9 korr. 182,0 \pm 29,0</div> </div>	$175,4 \pm 29,0$

Der von Dunning angegebene Wert für Ge wird diskutiert. Es wird mit unserem Wert nach einer Formel von Bethe die Energie der Indium-Resonanzneutronen zu $E_r = 0,95 \text{ eV}$ berechnet. Mit dem von uns berechneten Wert für Hf wird der Dunningsche Wert für Zirkonium zu $\sigma = 15,0 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ korrigiert.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Köln ausgeführt. Herrn Prof. Dr. F. Kirchner, dem Leiter des Instituts, bin ich für sein stetes und förderndes Interesse am Fortgang der Arbeit zu großem Dank verpflichtet. Ebenso danke ich Herrn Dozent Dr. W. Riezler, der mir mit seinem Rat dauernd zur Seite stand, für viele wertvolle Hinweise. Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn cand. phys. W. Stupp für seine unermüdliche Hilfe bei der Aufnahme der Meßreihen.

Literaturverzeichnis

- 1) E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti u. E. Segrè, Proc. Roy. Soc. London A 149. S. 522. 1935.
- 2) I. R. Dunning u. G. B. Pegram, Phys. Rev. 43. S. 497. 1933; 43. S. 775. 1933; 44. S. 317. 1933; 45. S. 586. 1934; I. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. 48. S. 265. 1936.
- 3) M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London A 162. S. 127. 1937.
- 4) Cockroft u. Walton, Nature 129. S. 242. 1932; Proc. Roy. London A 136. S. 619. 1932.
- 5) H. Neuert, Physik. Z. 36. S. 629. 1935.
- 6) C. Hailer, Wissensch. Veröff. d. Siemens-Werke 17. S. 115. 1938.
- 7) J. S. Allen u. J. H. Williams, Phys. Rev. 53. S. 928. 1938.
- 8) O. Laaff, Ann. d. Phys. 32. S. 743. 1933.
- 9) H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9. S. 69. 1937.
- 10) J. Hornbostel u. H. H. Goldsmith, Phys. Rev. 58. S. 18. 1940.
- 11) G. v. Hevesy, Das Element Hafnium. Berlin. Jul. Springer 1927.

Köln, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. Dezember 1941)

**Der Wirkungsquerschnitt von Krypton und Xenon
gegenüber langsamen Neutronen**

Von Wolfgang Riezler

(Mit 1 Abbildung)

Die Wirkungsquerschnitte der meisten stabilen Elemente gegenüber thermischen Neutronen sind bereits untersucht worden¹⁾. Es fehlten, bei Beginn dieser Arbeit nur noch die Messungen für die schweren Edelgase Krypton und Xenon. Die Werte für diese beiden Gase scheinen deswegen nicht ohne Interesse, weil diese Elemente beide eine große Anzahl von Isotopen besitzen und damit die Möglichkeit, daß noch ein besonders großer Wirkungsquerschnitt gefunden würde, verhältnismäßig groß war; denn ein hoher Wirkungsquerschnitt gegenüber langsamen Neutronen tritt immer dann auf, wenn eines der Isotope eine Resonanzstelle für Neutronen hat, deren zugehörige Resonanzenergie nahe bei Null liegt, also höchstens von der Größenordnung 1 eV ist. Daß die Werte für die schweren Edelgase bisher nicht gemessen waren, liegt natürlich daran, daß diese Stoffe nur in sehr kleinen Mengen zur Verfügung stehen; es hat aber auch den Grund, daß sie nur mit gewissen Schwierigkeiten in zweckmäßige Absorptionsschichten angeordnet werden können. Uns stellte die Griesheimer Orthogen-Verkaufs-G.m.b.H. freundlicherweise je einen halben Liter Krypton und Xenon zur Verfügung. Diese Mengen waren für die Messung der Wirkungsquerschnitte ausreichend, wenn auch, infolge der verhältnismäßig schwachen Absorption, keine sehr hohe Meßgenauigkeit zu erreichen war.

Die Versuchsanordnung war die gleiche, wie sie in der vorstehenden Arbeit beschrieben ist¹⁾. Der Abstand zwischen Absorber und Ionisationskammer ist so groß, daß kein merklicher Anteil der im Absorber gestreuten Neutronen noch in die Kammer gelangen kann. Aus dem gemessenen Schwächungskoeffizienten berechnet sich also ein Gesamtwirkungsquerschnitt, der die Summe aus wahren Absorptionsquerschnitt und Streuquerschnitt darstellt.

Die Absorptionsgefäße mußten für die schweren Edelgase besonders konstruiert werden. Sie sind in nachstehender Abbildung

1) Vgl. die vorstehende Arbeit von K. H. Lauterjung; dort auch weitere Schriftumsangaben.

V
4
1

1
9
4
2

XUM

dargestellt. Das eigentliche Absorptionsgefäß besteht aus einer Aluminiumdose mit 5 mm Wandstärke, einer lichten Weite von 30 mm und einer lichten Höhe von 20 mm. Die Dosen wurden zunächst in den zwei Teilen gedreht, die in der Zeichnung durch punktierte Linien angedeutet sind und dann verschweißt. Zum Einfüllen des Gases war ein Kupferrohr eingesetzt, das vor dem Schweißen mit Hilfe eines aufgedrehten stramm passenden Gewindes fest in die

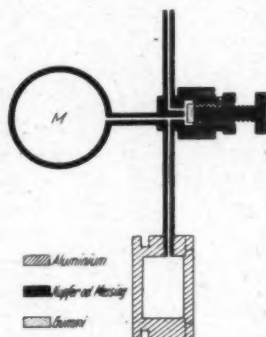


Abb. 1. Absorptionsgefäß für schwere Edelgase

Dose eingeschraubt war. Irgendwelche Dichtungsmittel wurden nicht verwendet, da diese beim Eintauchen in flüssige Luft, was bei der Füllung erforderlich ist, leicht einmal hätten zu einer Undichte Anlaß geben können. Durch das stramme Einpassen war die Anordnung jedoch auch ohne diese so dicht, daß trotz des kleinen Volumens bei Kryptonfüllung mit 25 Atm. auch nach zwei Monaten noch keine Druckabnahme feststellbar war. Das Ventil war so konstruiert, daß es einerseits beim Auspumpen vakuumdicht war, andererseits hohen Druck im Absorptionsgefäß absperrte. Dies wurde durch

eine kleine, mit Hilfe einer Schraube verstellbare Gummiplatte erreicht. Die Einzelheiten sind aus der Abb. 1 ersichtlich. Zur Kontrolle des Gasdrucks war am Ventil ein kleines Manometer (*M*) angebracht. Beim Einfüllen des Edelgases wurde das mit dem Vorratskolben verbundene Absorptionsgefäß in flüssige Luft getaucht, so daß der ganze Gasvorrat in ihm einfrohr und nach dem Wiederauftauen bei geschlossenem Ventil auf den erforderlichen Druck von etwa 25 Atm. kam.

Die Untersuchung zeigte, daß ein Strom thermischer Neutronen durch die untersuchten Edelgase nur verhältnismäßig wenig geschwächt wurde, der Wirkungsquerschnitt also ziemlich klein war. Es waren daher ziemlich lange Meßreihen erforderlich, um die durch die Statistik bedingten Meßfehler herabzudrücken. Die unmittelbaren Meßergebnisse enthält umstehende Tabelle.

Bei der Messung ohne Absorber wurde eine leere Absorptionsdose in den Strahlengang gebracht, so daß eine besondere Korrektur für das Absorptionsgefäß nicht erforderlich war. Der Anteil der langsamen Neutronen ergab sich aus der Differenz der mit und ohne Kadmium gemessenen Zahlen. Um Fehler infolge etwaiger Schwan-

Gas	Kr	Kr	X
Druck (bei 20° C) in Atm. . . .	22,6	25,0	23,2
Teilehen- zahl {	ohne Absorber ($I_0 + N$)	8992	7156
	mit Absorber ($I + N$)	8798	7016
	mit Kadmium (N)	2394	1773
I/I_0	$0,971 \pm 0,023$	$0,974 \pm 0,024$	$0,958 \pm 0,015$

kungen der Neutronenintensität auszuschalten, wurden bei der Messung leeres und volles Absorptionsgefäß und Kadmiumfilter alle zwei Minuten ausgewechselt, jedoch so, daß die gesamte Meßdauer für jeden der drei Meßpunkte die gleiche war.

Aus den Meßdaten berechnen sich folgende Werte für den Wirkungsquerschnitt eines Atoms gegenüber langsamen Neutronen:

Krypton $(23,5 \pm 14) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$,

Xenon $(36,9 \pm 13) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Die angegebenen Fehlergrenzen entsprechen dem wahrscheinlichen statistischen Fehler. Es zeigt sich also, daß die Wirkungsquerschnitte dieser beiden Edelgase gegenüber thermischen Neutronen von der gleichen Größenordnung sind, wie die der meisten andern Elemente. Es bleibt die auffallende Tatsache bestehen, daß von den fünf Elementen mit hohem Einfangquerschnitt für langsame Neutronen (Cd, Sm, Eu, Gd, Dy) fast alle, nämlich vier, den seltenen Erden angehören und im periodischen System dicht aufeinander folgen.

Zusammenfassung

Die Wirkungsquerschnitte von Krypton und Xenon gegenüber langsamen Neutronen werden zu

$$(23,5 \pm 14) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \text{und} \quad (36,9 \pm 13) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

bestimmt.

Frl. stud. phys. G. Caspers danke ich für ihre Mithilfe bei der Aufnahme der Meßreihen, der Griesheimer Orthogen-Verkaufs-G.m.b.H. für die Überlassung der reinen Edelgase.

Köln, Physikalisches Institut der Universität, 11. Dezember 1941.

(Eingegangen 4. Februar 1942)

V
4
1

1
9
4
2

XUM

Kontinuierliche Emissionsspektren der Edelgase¹⁾**Von B. Vogel**

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt)

(Mit 4 Abbildungen)

1. Einleitung

Unter den kontinuierlichen Emissionsspektren der Gase sind diejenigen der Edelgase am wenigsten genau untersucht²⁾. Außer den nur bei Helium beobachteten schmalen Seriengrenzkontinua des Atoms und einem von dem gleichen Gase emittierten intensiven Kontinuum im äußersten ultravioletten Gebiet zwischen 1100 und 600 Å waren bei Beginn der vorliegenden Untersuchungen lediglich schwache kontinuierliche Emissionsspektren von Helium, Neon und Argon bekannt, die sich vom Roten (Grenze zwischen 6500—6900 Å) bis mindestens 2200 Å erstrecken sollten. Über die Intensitätsverteilung und Abhängigkeit von den Anregungsbedingungen war nichts bekannt. Von Finkelnburg und dem Verf. wurden neben den Kontinua von Helium, Neon und Argon erstmalig auch kontinuierliche Spektren bei Krypton und Xenon gefunden, über die Finkelnburg in seinem Buche 1938 schon kurz berichtete. Später wurde auch die Beobachtung von kontinuierlichen Emissionsspektren des Argon und Krypton von McCallum³⁾ mitgeteilt, und von Déjardin⁴⁾ ähnliche Beobachtungen der Kontinua aller Edelgase, in beiden Fällen aber ohne nähere Angaben über Intensitätsverteilung und weitere Einzelheiten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den kontinuierlichen Emissionsspektren aller Edelgase, die bei diesen in Wechselstromentladungen bei Stromstärken von 10—150 mA und Drucken von 10—80 Torr beobachtet wurden. Ob und wie weit die hier behandelten Kontinua mit den oben erwähnten identisch sind, läßt sich mangels

1) Die bereits im Juni 1939 fertiggestellte Arbeit, die aus äußeren Gründen erst jetzt veröffentlicht wird, stellt einen Auszug aus der als Eigendruck erschienenen Dissertation des Verfassers (D 87) dar.

2) Einzelheiten und ältere Literatur vgl. W. Finkelnburg, *Kontinuierliche Spektren*. Berlin 1938. S. 295.

3) Vgl. P. McCallum, *Nature* 142. S. 614. 1936.

4) G. Déjardin, *Journ. de Phys. et le Rad.* [7] 9. S. 142. 1938.

genauer Angaben in den oben erwähnten Mitteilungen nicht feststellen. Es ist das Ziel dieser Arbeit, absolute Intensitäten, Intensitätsverteilungen, Stromstärkeabhängigkeit und Druckabhängigkeit dieser Edelgaskontinua und ihren Zusammenhang mit der Form der anregenden Entladung zu bestimmen und die Möglichkeiten der Deutung der Kontinua zu erörtern.

2. Experimentelles

Gearbeitet wurde mit Wechselstrom; als Stromquelle diente ein 10000-Volt-Transformator, der mit 50periodischem Wechselstrom gespeist und primärseitig durch Widerstände geregelt wurde. Ver-

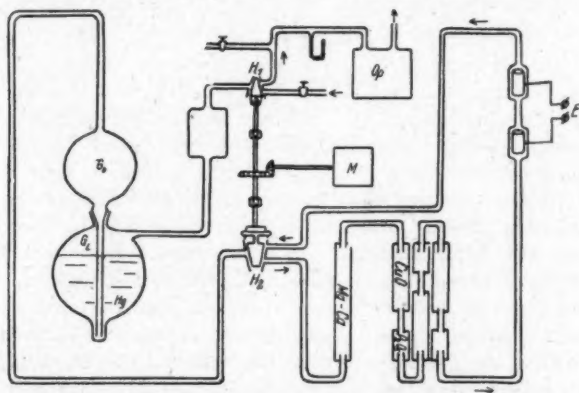


Abb. 1. Zirkulationspumpe und Reinigungsanlage.

G_1 , G_2 oberes bzw. unteres Glasgefäß der Zirkulationspumpe, H_1 und H_2 Dreiweghähne, M Motor zu deren Antrieb, $Mg-Ca$, CuO , P_2O_5 Reinigungsrohre, E Entladungsrohr, Op Ölpumpe

schiedenste Entladungsrohre, und zwar weite sowohl wie Kapillarrohre, wurden verwandt.

Die verwendeten Gase wurden in Stahlflaschen bezogen¹⁾ und waren alle, abgesehen von Neon, das spektralrein vorlag, gering mit anderen Edelgasen verunreinigt. Der Grad der Verunreinigung war jedoch so klein, daß bei den Belichtungszeiten zur Aufnahme des jeweils untersuchten Gases nur einzelne Linien des verunreinigenden Edelgases gerade eben in Erscheinung traten.

1) Der Firma Linde-A.-G., Hölrieglkreuth, gebührt besonderer Dank für die kostenlose Überlassung aller Edelgase und die bereitwillige Lieferung der erforderlichen Mengen auch der selteneren.

Auf die Beseitigung aller unedlen Gase wurde peinlichst Wert gelegt, vor allem auf die Fernhaltung des Wasserstoffs, weil gerade dieses Gas typische Atom- und Molekülkontinua emittiert, die die Untersuchung der Edelgaskontinua verfälschen könnten.

Um die genügende Reinheit der Gase während der langen Versuchsdauer zu gewährleisten, mußte im strömenden Gas gearbeitet werden. Bei Drucken über 20 Torr macht das aber erhebliche Schwierigkeiten, da die üblichen automatischen Pumpen versagen. Vom Verf. wurde deshalb eine Methode der Gaszirkulation entwickelt, die sich auch im Dauerbetrieb bestens bewährte. Der Aufbau der Apparatur ist aus Abb. 1 zu ersehen: links die mechanisch wirkende, vom Motor M über die Hähne H_1 und H_2 gesteuerte Töplerpumpe, rechts die Reinigungsanlage und das Entladungsrohr E^1).

3. Die Entladungsbedingungen

Bei der Ausführung der Untersuchung machte sich sehr erschwerend die geringe Kenntnis und Beherrschung der Entladungsbedingungen im Druckbereich 10–80 Torr bemerkbar. Zudem verhielten sich auch die einzelnen Edelgase noch durchaus verschieden.

Im Helium und Neon setzte unter allen angewandten Bedingungen die Entladung diffus an den Elektroden an und erfüllte gleichmäßig alle Rohrteile. Bei den besonders interessierenden schweren Edelgasen dagegen gibt es zwei völlig verschiedene und vielfach gleichzeitig existenzfähige Entladungsformen, eine das ganze Rohr erfüllende diffuse und eine kontrahierte schlauchartige Form.

So war in Argon bei 64 Torr und 150 mA das Rohr über den ganzen Querschnitt von einer bläulich-weißen Säule erfüllt, während sich in seiner Achse als zweite Säulenform ein ausgesprochen rötlicher Schlauch von 1–3 mm Durchmesser erstreckte. Beide Entladungsformen existierten also gleichzeitig, und es herrschte nur einmal die diffuse, das andere Mal die kontrahierte vor, je nach Stromstärke und Druck. Mit abnehmender Stromstärke verschob sich die Entladung zugunsten der diffusen Form, die im allgemeinen bei Stromstärken unter 100 mA vorherrschte. Aber noch bei 90 mA war ein kontrahierter Faden in der Rohrachse deutlich zu erkennen und dürfte auch unterhalb dieser Stromstärke, von der diffusen Säule verdeckt, noch existiert haben.

In dem Stromstärkebereich von 150–80 mA waren beide Säulenformen bis herunter zu Drucken von etwa 30 Torr gleichzeitig zu

1) Für die Einzelheiten dieser Gasreinigungsmethode vgl. B. Vogel, Ztschr. f. techn. Phys. 20. S. 220. 1939.

erhalten. Bei noch niedrigeren Drucken erschien die Säule völlig diffus. Es sei betont, daß diese Zweiteilung der Entladung, wie die Spektren zeigen, keinesfalls durch unedle Verunreinigungen verursacht war.

Elektrisch unterscheiden sich beide Entladungsformen durch den Wert der Brennspannung, die bei vorherrschender diffuser Entladung um etwa 20% höher lag. Oberhalb etwa 30 Torr liegt die fallende Bogencharakteristik vor; zwischen 15 und 20 Torr liegt der Übergang zur Glimentladung, deren Charakteristik bei 10 Torr rein beobachtet wurde.

Optisch unterscheidet sich die diffuse Säulenform durch eine gegenüber der Schlauchform etwa verdoppelte Intensität des Kontinuums bei gleicher Stromstärke, während umgekehrt die Linienintensität bei vorherrschender Schlauchentladung überwiegt.

Die Aufnahme der Spektren jeder Säulenform allein war exakt getrennt nicht möglich. Immerhin ließ sich feststellen, daß die Linienspektren beider Säulen (fast ausschließlich Bogenlinien) identisch sind und die bläuliche bzw. rötliche Farbe von einer Intensitätsänderung gewisser Linien und der veränderten Intensität des Kontinuums herrührt. Alle im weiteren zu besprechenden Aufnahmen wurden bei 100 mA gemacht; die spektroskopischen Ergebnisse beziehen sich also auf die vorwiegend diffuse Entladungsform.

Krypton und Xenon zeigen in weit größerem Maße als Argon die Neigung zur Säulenkontraktion. In weiten Röhren zeigt hier die rötliche kontrahierte Säule die unangenehme Eigenschaft, nicht wie in Argon ruhig in der Rohrachse zu brennen, sondern unaufhörlich zu wandern. Mitunter trifft sie auf die Rohrwand, wobei ein klatschendes Geräusch hörbar wird. Der Versuch, sie mit Hilfe metallischer Blenden in die Rohrachse zu zwingen, gelang stets nur ganz kurzzeitig, ebenso der Versuch, die diffuse Entladungsform durch vorsichtige Drucksteigerung von kleinen Drucken her stabil zu erhalten.

Die Aufnahmen von Krypton und Xenon mußten daher mit einem Kapillarrohr gemacht werden. Inwieweit hier die kontrahierte Form vor der diffusen vorherrschte, kann mit Sicherheit bei hohen Drucken und Stromstärken von 100 mA nicht angegeben werden. Es war nur möglich, darauf zu achten, daß während der Aufnahmen der Entladungsstrom und damit die Brennspannung möglichst konstant blieben, was als ausreichendes Kriterium wenigstens für stabile Entladungsverhältnisse gelten kann. Im allgemeinen kann jedoch die diffuse Form als vorherrschend angenommen werden. Zu dieser Annahme berechtigt die bläulich-weiße Farbe der Entladung. Außer-

V
4
1

1
9
4
2

XUM

dem hatte sich schon bei Argon ergeben, daß bei derselben Stromstärke die Intensität des Kontinuums der überwiegend kontrahierten gegenüber der diffusen Säule etwa die Hälfte betrug. Also mußten sich Meßpunkte, die infolge der in dieser Arbeit nicht berücksichtigten kontrahierten Säulenform entstanden, dadurch verraten, daß sie vollkommen aus der normalen Reihe herausfielen. Solche Punkte sind daher bei der späteren Diskussion der Ergebnisse nicht berücksichtigt.

Die Beobachtungen über die Kontraktion der Säulen lassen sich bei den vorliegenden Edelgasentladungen nach Überlegungen von Rompe¹⁾ als Folge eines Temperaturgefälles senkrecht von der Achse des Entladungsrohres nach der Rohrwand und eines entsprechenden Dichtegefälles in umgekehrter Richtung erklären. Die Tatsache, daß bei Helium und Neon die Säulenkontraktion in dem betrachteten Druckgebiet visuell nicht beobachtbar war, und daß sie bei Xenon gegenüber Argon besonders stark war, läßt schließen, daß dieses Temperaturgefälle und das sich ergebende Dichtegefälle am größten war bei dem schwersten Edelgas Xenon und mit dem Atomgewicht des Füllgases abnahm. Hieraus erklärt sich auch die Beobachtung, daß die Temperatur der Rohrwand am höchsten war bei dem nicht kontrahierenden Helium. Es folgen dann Neon, Argon, Krypton und Xenon. Augenfällig wird diese Erklärung der Kontraktion noch durch den Versuch bestätigt: Wenn nämlich beim Zirkulieren des Gases dieses schubweise durch das Rohr strömte, wodurch also eine durchgreifende Störung des Temperatur- und Dichtegefälles eintrat, so schob eine diffuse positive Säule wie eine Wolke die kontrahierte Säule vor sich her. Hinter dieser Wolke folgte die kontrahierte Säule mit dem Wiedereintreten des alten Temperatur-Dichte-Gleichgewichtes.

Unerwartet bei den Versuchen waren die Beobachtungen über die Zerstäubung des Elektrodenmaterials. Kupfer zeigte bei allen Edelgasen, auch den schwersten, neben Aluminium die geringste Zerstäubung. Kupfer bewährte sich bei allen Drucken in jedem Edelgas. Bei dem hohen Druck stimmt dies mit der Feststellung überein, daß die Zerstäubung mit zunehmendem Druck abnimmt. Aber Eisen z. B. zerstäubte bei hohen Drucken in Argon innerhalb weniger Stunden so stark, daß das Rohr selbst in einigen Zentimeter Abstand von den Elektroden nahezu undurchsichtig wurde. Dies stimmt weder mit der Abnahme der Zerstäubung mit wachsendem Druck überein, noch mit der im allgemeinen für die Zerstäubung von Metallen geltenden Reihe, nach der Kupfer hätte leichter zerstäuben

1) R. Rompe, Ztschr. f. Phys. 101. S. 220. 1936.

sollen. Ferner war die Zerstäubung des Kupfers in allen Edelgasen so gering, daß die angegebene Zunahme der Zerstäubung mit wachsendem Atomgewicht des Füllgases der Beobachtung entging. In den Druckgebieten oberhalb 10 Torr und bei Wechselstrom haben also die üblichen Zerstäubungsregeln bei Edelgasen als Füllgas, wenn überhaupt, dann nur teilweise Gültigkeit.

4. Die Spektralaufnahmen und ihre Auswertung

Es sollte nun die Ausdehnung und Intensitätsverteilung der Edalgaskontinua sowie ihre Stromstärke- und Druckabhängigkeit untersucht werden. Gemessen wurde dabei photographisch-photometrisch.

Die Aufnahmen für das Wellenlängengebiet $\lambda > 4000 \text{ \AA}$ wurden mit einem Dreiprismenglasspektrographen, diejenigen $\lambda < 4000 \text{ \AA}$ mit einem Quarzspektrographen gemacht.

Bei allen Gasen, ausgenommen Argon, wurden die zu vergleichenden Intensitätsaufnahmen dadurch gewonnen, daß ein Zeissches Quarzstufenfilter mit 6 Stufen unmittelbar vor den Spektrographenspalt gesetzt wurde. Nun wurde die positive Säule derart durch das Stufenfilter hindurch auf den Spalt abgebildet, daß sowohl die 6 Filterstufen als auch ober- und unterhalb noch je ein schmaler Streifen der Säule ungefiltert gleichzeitig photographiert wurde. Jede einzelne Aufnahme des Spektrums lieferte also 7 verschiedene Intensitätsstufen, deren Verhältnisse untereinander aus den Daten des Filters bekannt waren.

Bei Argon wurden die Intensitätsmarken durch Veränderung der Spaltbreite gewonnen.

Als Plattenmaterial diente für die Aufnahmen im Sichtbaren die Pervola-Platte von Perutz, für die Ultraviolett-Aufnahmen die Spezialultraviolettplatte der Agfa. Alle Platten wurden vollständig gleich behandelt, mit Ausnahme der Platten für Argon. Die Infrarot-Aufnahmen wurden mit Spezialplatten der Agfa gemacht¹⁾.

Insgesamt wurden 54 Platten mit 144 Aufnahmen ausgewertet und hierzu zunächst mit dem Registrierphotometer des Physikalischen Staatsinstitutes der Universität Hamburg photometriert²⁾.

1) Der I.G. Farbenindustrie sei für die kostenlose Überlassung der infrarotempfindlichen Platten bestens gedankt.

2) Herrn Prof. Dr. Koch, dem Direktor des Instituts, bin ich sehr zu Dank dafür verpflichtet, daß er mir freundlichst das Photometrieren der Aufnahmen in seinem Institut gestattete.

Auf den Photometerkurven wurden nun eine Anzahl geeigneter Punkte zur Bestimmung der Intensität der zugehörigen Wellenlänge ausgesucht. Die zwischen diesen Meßpunkten liegenden Intensitäten wurden an Hand des Verlaufs der Photometerkurven unter Berücksichtigung der Plattenempfindlichkeit interpoliert. Bei den meisten Kurven wurden hierzu 8 bzw. 13 Wellenlängen ausgesucht. Bei einem einzigen Typ genügten 5.

Zur Bestimmung der Absolutintensität der Kontinua wurde das des Kryptons an das einer geeichten Wolframbandlampe und die übrigen Edelgasspektren wieder an das Kryptonkontinuum angeschlossen. Aus äußeren Gründen sind die Argon-Aufnahmen etwas anders entwickelt worden als die übrigen Platten, so daß beim Argon die Absolutintensität etwas weniger genau bekannt ist.

Als Fehlerquelle bei der Intensitätsmessung kommt zunächst in Betracht die Unsicherheit, mit der die Durchlässigkeit des vor 3 Jahren geeichten und möglicherweise inzwischen gealterten Stufenfilters bekannt war, ferner die Veränderung der Emission der Wolframbandlampe seit der Eichung. Die Unsicherheit der Messung der Schwärzung des Plattenschleiers sowie des Kontinuums ließ sich zu 5% bestimmen. Noch kleiner ist nach einem Vergleich der Ergebnisse der durch Anschluß der verschiedenen Platten aneinander entstehende Fehler. Lediglich bei Argon ergab sich ein Fehler bis zu 7%, der vermutlich auf die veränderte Entwicklungsart zurückzuführen ist.

5. Die spektroskopischen Ergebnisse

a) Die Grenzen der Kontinua

Die Bestimmung der langwelligen Grenze der Edelgaskontinua, die bei 100 mA und etwa 70 Torr ausgeführt wurde, ergab die in Tab. 1 zusammengestellten Werte mit einem recht weiten Fehlerbereich, weil sich stets in der Nähe der Grenze intensive Linien befinden, die bei den zur Aufnahme der Kontinua nötigen Belichtungszeiten die benachbarten Gebiete stark überstrahlen. Der Überstrahlungen wegen konnte auch nicht festgestellt werden, wie die Intensität in der Nähe der Grenze verläuft, ob diese scharf oder diffus ist.

Tabelle 1

Edelgas	Langwellige Grenze
He	7550 \pm 80 Å
Ne	7450 \pm 80 Å
Ar	8100 \pm 100 Å
Kr	8250 \pm 250 Å
X	9250 \pm 250 Å

Nach kurzen Wellen konnte das Kontinuum bis zu der Wellenlänge 1800 Å verfolgt werden, wo die Luftabsorption und die Schicht der verwandten photographischen Platten der Aufnahme ein Ziel setzten. Bei allen Edelgasen wurde ein ähnlicher Verlauf im Ultravioletten festgestellt.

b) Die Intensitätsverteilung der Kontinua bei hohem und niedrigem Druck

Abb. 2 gibt eine Übersicht über die Intensitätsverteilung der Kontinua aller Edelgase. Von oben nach unten folgen diese in ihrer natürlichen Reihenfolge unter den gleichen Bedingungen von Druck und Stromstärke. Die linke Seite zeigt die Spektren aller 5 Edelgase bei 100 mA und etwa 70 Torr, die rechte Seite die des Argon, Krypton und Xenon bei der gleichen Stromstärke, aber nur 10 Torr. Die Maßstäbe konnten wegen der sehr verschiedenen Intensität der einzelnen Spektren nicht in allen Fällen gleich gewählt werden. Man beachte deshalb die Ordinatenmaßstäbe!

Unterschrift zu Abb. 2:
Intensitätsverlauf der Kontinua aller Edelgase zwischen 6800 und 4000 Å. 100 mA, Drucke 70 Torr und 10 Torr. Absolute Intensität als Ordinaten

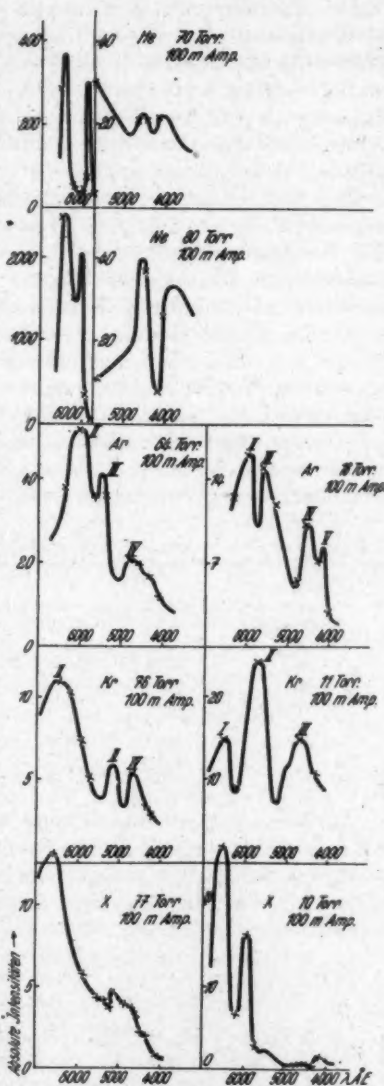


Abb. 2

Helium und Neon mußten überhaupt in zwei verschiedenen Maßstäben aufgetragen werden, da die Intensität nach dem kurzwelligen Gebiet zu stark abfällt.

Der Vergleich der Absolutintensitäten der Kontinua der fünf Edelgase zeigt zunächst, daß diese bei Krypton und Xenon am geringsten ist, für Argon auf den 4fachen Maximalwert ansteigt, während der Maximalwert bei Helium der 30fache und beim Neon gar der 200fache der bei den schwersten Edelgasen gemessenen ist. Auffallenderweise ist also kein dem periodischen System entsprechender Gang der Absolutintensität der Edelgaskontinua festzustellen.

Im übrigen aber zeigt der Vergleich der Kurven eine auffallende Ähnlichkeit im allgemeinen Verlauf. Charakteristisch ist das Auftreten ausgeprägter Maxima, deren Lage, auf etwa $\pm 3 \text{ \AA}$ genau bestimmt, in Tab. 2 zusammengestellt ist, während die relative Intensität aus Abb. 2 zu entnehmen ist. Bei Xenon, Krypton und Argon ist in Tab. 2 außer den in Abb. 2 eingezeichneten je noch ein langwelligeres Maximum angegeben, das aus den Photometerkurven ermittelt wurde, wegen des Schleiers und der hier geringen Plattenempfindlichkeit aber weniger genau festgelegt ist.

Tabelle 2

Maximum		I	II	III	IV	V
Xe	77 Torr	6843	6552	5578	5169	4677
	10 „	6495	5970	4483	4207	
Kr	74 „	7028	6490	5190	4674	3960
	11 „	6495	5710	4676	4361	
	64 „	7149	5993	5592	4785	
Ar					4585	
	16 „	7100	5850	5504	4513	4232
Ne		6400	6013	4641	4186	
He		6465	5919	4584	4322	

Aus dem Vergleich der Maxima auf allen Photometerkurven ist die in Abb. 2 bei Argon und Krypton und in Tab. 2 gegebene Zuordnung der Maxima abgeleitet worden, die aber nur mit Vorbehalt angegeben sei. Ob dieser Zuordnung ein theoretischer Zusammenhang entspricht, läßt sich an Hand des vorliegenden Materials nicht sicher entscheiden, obwohl die große Ähnlichkeit des Verlaufs der Spektren einen solchen nahelegt. Es ist andererseits nicht unmöglich, daß Helium und Neon im langwelligeren Spektralgebiet doch noch ein weiteres Maximum besitzen.

Betrachtet man nun die Intensitätsverteilung bei niedrigem Druck (Abb. 2 rechte Seite), so fällt zunächst bei Argon auf, daß sich der Charakter der Kurve gegenüber hohem Druck praktisch

nicht geändert hat. Jedoch hat sich die Lage sämtlicher Maxima nach kürzeren Wellen zu verschoben, wie aus der Tabelle hervorgeht. Das Maximum I im Roten ist auf den Photometerkurven nur noch schwach angedeutet und ist danach ebenfalls um etwa 50 Å nach kurzen Wellen zu gerückt.

In ihrem Charakter verändert erscheinen jedoch die Kurven des Krypton und Xenon. Bei beiden fallen zwei sehr intensive Maxima auf, bei denen ein Zusammenhang mit dem Kurvenverlauf bei hohen Drucken zunächst nicht gegeben erscheint. Die Photometerkurven zeigen das letzte langwellige Maximum I nicht mehr, das bei hohem Druck deutlich sichtbar war. Es läßt sich nun unter Heranziehung der bei Argon festgestellten Tatsache der Violettverschiebung der Maxima bei Druckabnahme folgender Zusammenhang vermuten: Das letzte langwellige Maximum I ist auch hier bei niederem Druck nach kürzeren Wellen zu gewandert und ist mit dem sehr intensiven ersten Maximum der Kurven bei niederem Druck identisch. Das zweite Maximum dieser Kurven wäre dann mit dem Maximum II identisch, das auf den Kurven für hohen Druck gezeichnet ist. Das vorliegende Plattenmaterial gestattet leider keine quantitative Intensitätsmessungen im Gebiet $\lambda > 6600$ Å. Zur endgültigen Festlegung dieser Vermutung bedürfte es vielmehr noch quantitativer Messungen im Bereiche 6600–8000 Å.

e) Die Stromstärkeabhängigkeit der Kontinua

Die Stromstärkeabhängigkeit der Spektren bei etwa 70 Torr wurde am Argon und Krypton untersucht. In beiden Fällen war

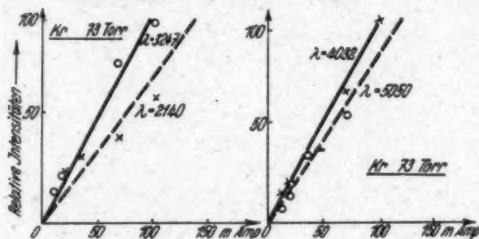


Abb. 3. Stromstärke-Isochromaten Kr bei 73 Torr

die Intensitätsverteilung von der Stromstärke völlig unabhängig; insbesondere verschieben sich die Maxima nicht. Die Intensität wächst linear mit der Stromstärke, wie aus den Beispielen der Stromstärke-Isochromaten Abb. 3 für verschiedene Wellenlängen des Kr-Kontinuums zu sehen ist.

Die Stromstärkeabhängigkeit der Kontinua bei niederem Druck wurde im Bereich 10–150 mA für Krypton und Xenon bei 10 Torr; für Argon bei 16 Torr gemessen. Die Gesetzmäßigkeiten sind die gleichen wie bei höherem Druck; der Charakter der Kurven sowie die Lage der Maxima sind von der Stromstärke unabhängig; die Intensität

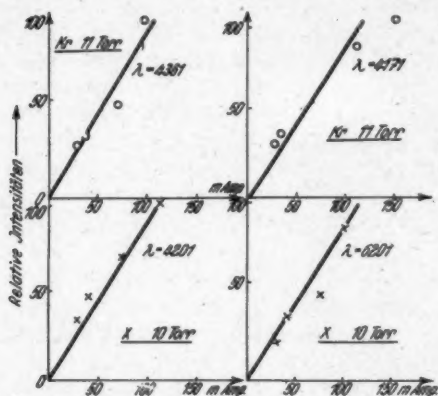


Abb. 4. Stromstärke-Isochromaten für Kr und X bei 10 Torr

nimmt linear mit dem Strom zu, wie als Beispiele einige Stromstärke-Isochromaten aus den Kontinua des Krypton und Xenon zeigen (Abb. 4).

d) Die Druckabhängigkeit der Kontinua

Eine klare Gesetzmäßigkeit in der Druckabhängigkeit der Kontinua ließ sich bei Krypton und Xenon in dem Druckbereich von 10–70 Torr wegen der unstabilen Entladungsverhältnisse nicht finden, obwohl für beide Gase die Intensitätsverteilung im Bereiche 6600 bis 4000 Å für 5 verschiedene Drücke gemessen wurde. Mit Sicherheit ließ sich jedoch die Verschiebung des Maximums II mit abnehmendem Druck nach kurzen Wellen bis herunter zu 16 Torr fast ungestört verfolgen.

Wesentlich ist aber, daß die eigentliche Niederdruck-Intensitätsverteilung sich nicht allmählich mit der Druckabnahme ausbildet, sondern plötzlich erst unterhalb 16 Torr hervortritt. Das gilt vor allem für das plötzliche Ansteigen der Intensität der Maxima II und III und ist eine gemeinsame Eigenschaft mindestens der Edelgase Krypton und Xenon. Die Absolutintensität bei niederem Druck ist nach Abb. 2 mehr als die doppelte der bei höherem Druck.

In auffallender Weise abweichend verhält sich die Druckabhängigkeit des Argonkontinuums. Hier verschiebt sich bei annähernd konstanter Intensitätsverteilung das ganze Spektrum mit wachsendem Druck um etwa 100 Å nach langen Wellen zu, während die Gesamtintensität monoton mit dem Druck zunimmt.

Dieses gesetzmäßige Verhalten des Argon einerseits und das scheinbare Fehlen einer Gesetzmäßigkeit bei Krypton und Xenon andererseits ist aus der Druckabhängigkeit der Entladungsbedingungen und der Zerteilung der Entladung, die oben ausführlich geschildert wurde, verständlich. Argon, als das leichteste der drei Gase, geht am ehesten bei Druckabnahme zur reinen diffusen Säulenform über, und die Entladung brennt bei den hier behandelten Drucken in Argon am ruhigsten. Bei Krypton und Xenon hingegen war die Instabilität der Entladung schon sehr störend.

e) Die die Kontinua begleitende Linienemission

Bei den gleichzeitig mit den Edelgaskontinua emittierten Linien handelt es sich fast ausschließlich um Bogenlinien. Über ihren Intensitätsverlauf wurde unter unseren Bedingungen im Gegensatz zu den Feststellungen von Mc Callum¹⁾ beobachtet, daß die Intensität einiger der Linien der der Kontinua parallel läuft, während andere sich umgekehrt verhalten oder keine merkliche Intensitätsänderung zeigen.

6. Die Deutung der Kontinua

Für die Emission ausgedehnter kontinuierlicher Spektren in Gasentladungen kommen grundsätzlich drei Ursachen in Betracht, nämlich:

I. Strahlungsemission bei Abbremsung von Entladungselektronen in den Feldern von Entladungsionen (Elektronenbremskontinua).

II. Strahlungsemission bei Einfangung von Elektronen durch Entladungsionen (Seriengrenzkontinua des Atoms).

III. Strahlungsemission im Stoß oder allgemeiner bei Wechselwirkung angeregter und unangeregter Atome (Molekülkontinua).

Den ersten Prozeß hat erstmalig Finkelnburg²⁾ zur Deutung der ausgedehnten Emissionskontinua in stromstarken Funken- und Bogenentladungen herangezogen, und diese Deutung ist inzwischen völlig gesichert. Für unsere Edelgaskontinua kommt die Deutung als Elektronenbremspektren aber nicht in Betracht. Einmal setzt

1) S. P. McCallum, *Nature* 142, S. 614. 1938.

2) W. Finkelnburg, *Ztschr. f. Phys.* 88, S. 297, 768. 1934; *Kontinuierliche Spektren*, S. 90. Berlin 1938.

nämlich ihre Emission einen beträchtlichen Ionisierungsgrad des Gases voraus, der sich durch gleichzeitige intensive Emission von Funkenlinien dokumentieren müßte. Funkenlinien wurden jedoch in unsern Spektren nur wenige und sehr schwache gefunden. Weiter widerspricht die langwellige Grenze unserer Kontinua der Deutung als Bremskontinua, und schließlich wäre für letztere eine quadratische Abhängigkeit der Intensität von der Stromstärke zu erwarten, während die Intensität der Edelgaskontinua linear von der Stromstärke abhängt.

Auch die Emission von Atomgrenzkontinua gemäß Prozeß II setzt einen erheblichen Ionisierungsgrad voraus, der offenbar in den Edelgasentladungen nicht vorhanden ist. Weiter weisen Seriegrenzkontinua auf ihrer langwelligen Seite eine Konvergenzstelle von Atomlinien auf, an die sie sich anschließen. Ein Zusammenhang von Linien mit den Maxima unserer Kontinua ließ sich aber in keinem Fall feststellen. Schließlich hängt auch die Intensität von Atomgrenzkontinua quadratisch von der Stromstärke ab, während die Edelgaskontinua eindeutig eine lineare Stromstärkeabhängigkeit zeigen.

Nach Ausschluß der übrigen Deutungsmöglichkeiten bleibt also nur übrig, die Edelgasspektren als Molekülkontinua zu deuten. Daß durch Übergänge von einem stabilen zu einem instabilen Molekülzustand so ausgedehnte Kontinua zustande kommen können, wie sie hier bei den Edelgasen beschrieben wurden, ist vom Beispiel des Wasserstoffkontinuums sowie dem des ausgedehnten ultravioletten Helium-Molekülkontinuums her bekannt¹⁾. Nun sind bei den Edelgasen stabile Moleküle im Grundzustand bekanntlich nicht möglich, dagegen ist aus der Untersuchung der Heliumbanden bekannt, daß im Stoß eines angeregten mit einem normalen He-Atom ein angeregtes stabiles Molekül gebildet werden kann.

Das gleiche kann man auch für die anderen Edelgase erwarten. Die Zahl solcher angeregter Edelgasmoleküle und damit auch die Intensität ihrer kontinuierlichen und diskreten Spektren sollte dann der Zahl der angeregten Atome und damit der anregenden Stromstärke direkt proportional sein. Damit stimmt die gefundene lineare Stromstärkeabhängigkeit der Intensität der Kontinua überein.

Eine ins Einzelne gehende Deutung der Struktur der Kontinua setzt natürlich eine genaue Kenntnis der Wechselwirkungsmöglichkeiten zwischen den angeregten und normalen Edelgasatomen voraus, d. h. also eine Kenntnis des Verlaufs der aus ihnen entstehenden

1) Vgl. W. Finkelburg, *Kontinuierliche Spektren*, S. 141 ff., 184, 192. Ber. in 1938.

Molekülzustände. Von dieser Kenntnis sind wir noch weit entfernt. Bei der großen Zahl der Wechselwirkungsmöglichkeiten sind aber recht komplizierte Spektren zu erwarten, und es werden ebenso Übergänge zwischen stark geneigten Potentialkurven vorkommen und zu ausgedehnten Kontinua nach Art des H_2 -Kontinuums führen, wie andererseits auch Übergänge zwischen flach verlaufenden van der Waals-Kurven, die die Erklärung der beobachteten steilen Maxima ermöglichen.

7. Zusammenfassung der Ergebnisse

1. Alle Edelgase emittieren bei Drucken zwischen 10 und 70 Torr und Stromstärken von 100 mA in Wechselstrom- und Gleichstromentladungen kontinuierliche Spektren, die in der vorliegenden Arbeit untersucht wurden. Alle quantitativen Untersuchungen sind in Wechselstromentladungen durchgeführt.

2. Es werden die ungefähren Lagen der langwelligen Grenzen der Kontinua aller Edelgase festgestellt (Tab. 1). Die langwellige Grenze verschiebt sich mit steigendem Atomgewicht nach langen Wellen. Im ultravioletten Gebiet sind die Spektren bis 1800 Å verfolgt worden.

3. Es werden die Intensitätsverteilungen dieser Spektren für jedes Edelgas in absoluten Einheiten im Wellenlängenbereich von 6600—4000 Å, für Krypton bis 2000 Å, gemessen (70 Torr, 100 mA). Es ergibt sich für alle ein Kurventyp von ähnlichem Verlauf mit 3—4 Maxima (Abb. 2).

4. Die Absolutintensität der Kontinua ist sehr verschieden; sie verhält sich für He, Ne und Ar wie 30 zu 200 zu 4 gegenüber den etwa die gleiche Intensität 1 besitzenden Spektren von Kr und Xe.

5. Die Stromstärkeabhängigkeit der Kontinua der schweren Edelgase wird im Bereich 20—150 mA untersucht. Intensitätsverteilung und Lage der Maxima sind unabhängig von der Stromstärke; die Absolutintensität geht linear mit ihr.

6. Es wird der Einfluß einer Druckänderung zwischen 10 und 70 Torr auf die Kontinua des Ar, Kr und Xe untersucht und eine allgemeine Verschiebung der Maxima mit steigendem Druck nach langen Wellen hin festgestellt. Die Intensitätsverteilung ändert sich bei Kr und Xe teilweise, bei Ar bleibt sie erhalten. Die Intensität aller Kontinua nimmt mit dem Druck monoton zu.

7. Die Kontinua werden als Molekülkontinua gedeutet.

8. Als Nebenergebnis werden die Eigenschaften der Edelgasentladungen bei Drucken zwischen 20 und 70 Torr untersucht. Die Elektrodenzerstäubung folgt dabei nicht mehr den im allgemeinen

geltenden Regeln; Kupfer zerstäubt am geringsten. Die Neigung der positiven Säule freiwillig zu kontrahieren, nimmt mit wachsendem Atomgewicht des Edelgases zu, die Erwärmung der Rohrwände hingegen ab.

Herr Prof. Dr. Finkelnburg gab die Anregung zu dieser Arbeit und hat sie durch sein besonderes Interesse ständig gefördert. Der Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule Darmstadt, Herr Prof. Dr. Rau, ließ mir jede Unterstützung zuteil werden, wodurch mir die Durchführung der Arbeit ermöglicht wurde. Beiden gilt mein besonderer Dank.

Darmstadt.

(Eingegangen 18. September 1941)

Betrag
zur vollständigen Lösung der Differentialgleichung
freier gekoppelter Schwingungen
für beliebige Dämpfung sowie Art und Größe
der Kopplung

Von Peter Schneider

(Mit 4 Abbildungen)

Eine auf den numerisch gegebenen Einzelfall anwendbare Lösung bei induktiver Kopplung hat F. Kiebitz¹⁾ angegeben. In neuerer Zeit hat K. W. Wagner²⁾ die allgemeinen Zusammenhänge zwischen der Dämpfung und Frequenz zweier durch allgemeine Kopplung verbundener Kreise und den Konstanten der ungekoppelten Kreise untersucht und für den Fall nicht zu großer Dämpfung und mäßiger Kopplung eine Reihe von Regeln über die Verlagerung der Eigenfrequenzen und der Dämpfung durch die Kopplung angegeben.

Die im folgenden durchgeführten Untersuchungen beziehen sich auf den allgemeinen Fall beliebiger Dämpfung sowie Art und Größe der Kopplung. Zwar ergeben sich, was aus den schon von Wagner³⁾ angegebenen Gründen zu erwarten war, keine einfachen Ausdrücke und Regeln. Aber durch Vermittlung einer Parameterfunktion y , deren zur Lösung in Betracht kommenden Werte innerhalb zweier leicht zu bestimmender Grenzen liegen, werden die Kopplungswerte der Dämpfung und Frequenz als Funktionen einer für die ungekoppelten Kreise geltenden Dämpfungsgröße r_0 dargestellt, deren Verlauf sich auch bei großen Verstimmungen verhältnismäßig leicht übersehen läßt.

Die folgenden Entwicklungen, bei deren Darstellung wir von der von Wagner⁴⁾ angegebenen Schreibweise ausgehen, werden nur für elektrische Schwingkreise ausgeführt, da sich die Ergebnisse ohne weiteres auf mechanische Kreise übertragen lassen.

1) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. [4] 40. S. 138 ff. 1913.

2) K. W. Wagner, Ann. d. Phys. [5] 82. S. 301 ff. 1938; Telegraphen- und Fernsprechtechnik 1935. S. 191.

3) K. W. Wagner, Ann. d. Phys. [5] 82. S. 302. 1938.

4) K. W. Wagner, a. a. O.

Die verallgemeinerte Stammgleichung

Der Kopplungsweig der beiden miteinander gekoppelten Kreise umfasse die Induktivität L_{12} , die Kapazität $C_{12} = \frac{1}{K_{12}}$ und den Widerstand R_{12} . In den Schwingkreisen seien neben den Kopplungsgliedern die Größen $L_1, C_1 = \frac{1}{K_1}, R_1$ sowie $L_2, C_2 = \frac{1}{K_2}, R_2$ enthalten. Weiter benutzen wir

$$(1) \quad \begin{cases} L_1 + L_{12} = L_{11}, & K_1 + K_{12} = K_{11}, & R_1 + R_{12} = R_{11}, \\ L_2 + L_{12} = L_{22}, & K_2 + K_{12} = K_{22}, & R_2 + R_{12} = R_{22}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen der freien gekoppelten Schwingungen werden in der symbolischen Form geschrieben

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 = 0, \\ a_{12} Q_1 + a_{22} Q_2 = 0, \end{cases}$$

wo die a_{nn} die Differentialoperatoren 2. Ordnung bedeuten:

$$(3) \quad a_{nn} = a_{nn} = K_{nn} + R_{nn} \cdot \frac{d}{dt} + L_{nn} \cdot \frac{d^2}{dt^2}.$$

Mit dem Ansatz

$$(4) \quad Q = e^{p \cdot t}$$

erhalten wir aus den Differentialoperatoren die algebraischen Faktoren

$$(5) \quad a_{nn} = a_{nn} = K_{nn} + R_{nn} \cdot p + L_{nn} \cdot p^2$$

und die Stammgleichung

$$(6) \quad a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0;$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$(7) \quad \begin{cases} p^4 (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) + p^3 (R_{11} L_{22} + R_{22} L_{11} - 2 R_{12} L_{12}) \\ + p^2 (K_{11} L_{22} + K_{22} L_{11} - 2 K_{12} L_{12} + R_{11} R_{22} - R_{12}^2) \\ + p (K_{11} R_{22} - 2 K_{12} R_{12} + K_{22} R_{11}) + K_{11} K_{22} - K_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

Wir bezeichnen nun die Quadrate der Eigenfrequenzen der ungedämpften Einzelkreise mit

$$(8) \quad \omega_{01}^2 = \frac{1}{L_{11} \cdot C_{11}} = \frac{K_{11}}{L_{11}}, \quad \omega_{02}^2 = \frac{1}{L_{22} \cdot C_{22}} = \frac{K_{22}}{L_{22}},$$

die Quadrate der Kopplungszahlen mit

$$(9) \quad x_L^2 = \frac{L_{12}^2}{L_{11} \cdot L_{22}}, \quad x_C^2 = \frac{K_{12}^2}{K_{11} \cdot K_{22}}, \quad x_R^2 = \frac{R_{12}^2}{R_{11} \cdot R_{22}},$$

die Quadrate der Grenzwiderstände der Einzelkreise mit

$$(10) \quad R_{g1}^2 = 4 \cdot \frac{L_{11}}{C_{11}} = 4 \cdot L_{11} \omega_{01}^2; \quad R_{g2}^2 = 4 \cdot \frac{L_{22}}{C_{22}} = 4 \cdot L_{22} \omega_{02}^2.$$

Weiter definieren wir als Dämpfungsmaß die als Widerstandszahl bezeichnete Größe

$$(11) \quad r = \frac{R}{R_g},$$

also den Quotienten aus Widerstand und Grenzwiderstand. Zwischen r und dem Dämpfungsfaktor δ besteht folgende Beziehung:

$$(12) \quad \delta = \frac{R}{2 \cdot L} = r \cdot \omega_0.$$

Die Widerstandszahlen der nicht gekoppelten Einzelkreise bezeichnen wir mit

$$(13) \quad r_{01} = \frac{R_{11}}{R_{g1}}, \quad r_{02} = \frac{R_{22}}{R_{g2}},$$

die Dämpfungsfaktoren mit

$$(14) \quad \delta_{01} = \frac{R_{11}}{2 \cdot L_{11}} = r_{01} \cdot \omega_{01}; \quad \delta_{02} = \frac{R_{22}}{2 \cdot L_{22}} = r_{02} \cdot \omega_{02}.$$

Damit erhält die Stammgleichung die Form

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & p^4 (1 - x_L^2) + 2 \cdot p^3 \cdot (\omega_{01} \cdot r_{01} + \omega_{02} \cdot r_{02} - 2 x_R x_L \cdot \sqrt{r_{01} r_{02} \cdot \omega_{01} \cdot \omega_{02}}) \\ & + p^2 \cdot [\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2 x_L x_C \cdot \omega_{01} \cdot \omega_{02} + (1 - x_R^2) \cdot 4 r_{01} \cdot r_{02} \cdot \omega_{01} \cdot \omega_{02}] \\ & + 2 p \omega_{01} \cdot \omega_{02} (\omega_{01} \cdot r_{02} + \omega_{02} \cdot r_{01} - 2 x_R x_C \cdot \sqrt{r_{01} \cdot r_{02} \cdot \omega_{01} \cdot \omega_{02}}) \\ & + \omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2 (1 - x_C^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Zur Festsetzung eines Verstimnungsmaßes der beiden Kreise führen wir einen Vergleichskreis mit den Größen ω_0 und r_0 ein, die durch die folgenden Gleichungen definiert werden:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_0^2 &= \omega_{01} \cdot \omega_{02}, \\ r_0^2 &= r_{01} \cdot r_{02}. \end{aligned} \right.$$

Den Verstimnungsgrad kennzeichnen wir mit Hilfe von zwei Größen ϱ und ε , der Dämpfungs- und der Frequenzverstimnungszahl. Diese beiden Größen werden [unter Berücksichtigung von (16)] durch die Gleichungen erklärt:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} r_{01} &= \varrho \cdot r_0, & r_{02} &= \frac{r_0}{\varrho}, \\ \omega_{01} &= \varepsilon \cdot \omega_0, & \omega_{02} &= \frac{\omega_0}{\varepsilon}. \end{aligned} \right.$$

Zwei Kreise sollen als abgestimmt gelten, wenn die beiden Gleichungen gelten

$$(18) \quad \varrho = 1, \quad \varepsilon = 1.$$

Abgestimmte Kreise brauchen nicht gleichgebaut zu sein, d. h. es ist nicht erforderlich, daß sie in den entsprechenden L -, C - und R -Werten übereinstimmen. Unter Benutzung dieser Bezeichnungen

erhält die Stammgleichung die Form:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & p^4(1 - x_L^2) + 2p^3 \cdot r_0 \cdot \omega_0 \cdot \left(\varepsilon \cdot \varrho + \frac{1}{\varepsilon \cdot \varrho} - 2x_R x_L \right) \\ & + p^2 \cdot \omega_0^2 \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} - 2x_L x_C + 4r_0^2(1 - x_R^2) \right] \\ & + 2p \cdot \omega_0^3 \cdot r_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varrho} + \frac{\varrho}{\varepsilon} - 2x_R x_C \right) + \omega_0^4(1 - x_C^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Weiter führen wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(20) \quad g_1 = \varrho \cdot \varepsilon + \frac{1}{\varrho \cdot \varepsilon}; \quad g_2 = \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}; \quad g_3 = \frac{\varepsilon}{\varrho} + \frac{\varrho}{\varepsilon};$$

$$(21) \quad h_1 = \frac{g_1 - 2x_R x_L}{1 - x_L^2}; \quad h_2 = \frac{g_2 - 2x_L x_C}{1 - x_L^2}; \quad h_3 = \frac{g_3 - 2x_R x_C}{1 - x_C^2};$$

$$(22) \quad a_1 = \frac{1 - x_C^2}{1 - x_L^2}; \quad a_2 = \frac{1 - x_R^2}{1 - x_L^2}.$$

Endlich benutzen wir, um von den jeweiligen Werten ω_0 unabhängig zu sein und so eine volle Allgemeinheit der Darstellung zu erreichen, die Substitution

$$(23) \quad p = \gamma \cdot \omega_0.$$

Damit erhalten wir die als Ausgangsgleichung der weiteren Untersuchungen dienende verallgemeinerte Stammgleichung

$$(24) \quad \gamma^4 + 2 \cdot \gamma^3 \cdot r_0 \cdot h_1 + \gamma^2 \cdot (h_2 + 4 \cdot r_0^2 \cdot a_2) + 2 \cdot \gamma \cdot r_0 \cdot h_3 + a_1 = 0.$$

Wir setzen nun weiter

$$(25) \quad a_{11} = \omega_0^3 \cdot L_{11} \cdot \beta_{11}; \quad a_{22} = \omega_0^3 \cdot L_{22} \cdot \beta_{22}; \quad a_{12} = \omega_0^3 \cdot \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}} \cdot \beta_{12},$$

wo

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_{11} &= \varepsilon^2 + 2 \cdot \varrho \cdot \varepsilon \cdot r_0 \cdot \gamma + \gamma^2, \\ \beta_{22} &= \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varrho \cdot \varepsilon} \cdot r_0 \cdot \gamma + \gamma^2, \\ \beta_{12} &= x_C + 2 \cdot x_R \cdot r_0 \cdot \gamma + x_L \cdot \gamma^2. \end{aligned} \right.$$

Damit läßt sich die verallgemeinerte Stammgleichung in der der Gl. (6) (S. 212) entsprechenden Form schreiben:

$$(27) \quad \beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2 = 0.$$

Die Lösungsbereiche der verallgemeinerten Stammgleichung

Es sollen im folgenden nur solche Konstanten, Koeffizienten und Lösungen in Betracht gezogen werden, die den physikalischen Gegebenheiten der Untersuchung entsprechen. Wir setzen daher die Koeffizienten von (24) als reell und positiv, die reellen Wurzeln und die

reellen Bestandteile der komplexen Wurzeln als negativ voraus und schreiben die vier Wurzeln in der allgemeinen Form

$$(1) \quad \gamma_{1,3} = -r_a \pm j \cdot w_a \quad \gamma_{2,4} = -r_b \pm j \cdot w_b.$$

r_a und r_b sind die Kopplungswerte der Widerstandszahlen; w_a und w_b werden die Frequenzzahlen der Kopplungsschwingungen genannt. Es sollen nun die Wurzeln bzw. ihre Komponenten in ihrer Abhängigkeit von r_0 betrachtet werden. Je nach dem durch die Größe von r_0 bedingten Dämpfungsbereich sind w_a, w_b reell oder imaginär, wobei drei Bereiche unterschieden werden. Der untere Dämpfungsbereich (Lösungs-)bereich umfaßt die Werte r_0 von 0 bis zu einem Werte $r_{0,g1}$, den wir als untere Grenzwiderstandszahl bezeichnen wollen. Innerhalb dieses Bereiches, der durch die Ungleichung

$$(2) \quad 0 \leq r_0 < r_{0,g1}$$

dargestellt wird, sind sowohl w_a wie w_b reell, die Wurzeln γ paarweise konjugiert komplex. Der mittlere Dämpfungsbereich wird durch die Ungleichung gekennzeichnet

$$(3) \quad r_{0,g1} < r_0 < r_{0,g2},$$

wo $r_{0,g2}$ die obere Grenzwiderstandszahl genannt wird. In diesem Bereich ist w_a imaginär und w_b reell, die Wurzeln γ_1 und γ_3 sind reell, γ_2 und γ_4 konjugiert komplex. Der obere Dämpfungsbereich wird durch die Ungleichung

$$(4) \quad r_{0,g2} < r_0 < \infty$$

definiert. Hier sind w_a und w_b imaginär, die vier Wurzeln reell. Sind die Frequenzzahlen imaginär, so setzen wir

$$(5) \quad w_a = -j \cdot v_a, \quad w_b = -j \cdot v_b.$$

Die Grenzfälle sind durch das Verschwinden von w_a und w_b an den Stellen $r_{0,g1}$ bzw. $r_{0,g2}$ gekennzeichnet. Die verallgemeinerte Stammgleichung besitzt hier Doppelwurzeln, die wir folgendermaßen bezeichnen:

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 = -r_{ag} \text{ (für } r_0 = r_{0,g1}), \\ \gamma_3 = \gamma_4 = -r_{bg} \text{ (für } r_0 = r_{0,g2}). \end{cases}$$

Die formale Lösung der Differentialgleichung der freien Kopplungsschwingungen

Unter Benutzung von Gl. (23) (S. 214) und der Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \delta_{a,b} = r_{a,b} \cdot \omega_0; & \delta_{ag} = r_{ag} \cdot \omega_0; & \delta_{bg} = r_{bg} \cdot \omega_0; \\ \omega_{a,b} = w_{a,b} \cdot \omega_0; & \beta_{a,b} = v_{a,b} \cdot \omega_0 \end{cases}$$

läßt sich die vollständige Lösung der Differentialgleichungen (2) (S. 212) für Q_1 (und entsprechend auch für Q_2) in der für alle Dämpfungsbereiche gültigen Form darstellen

$$(2) \quad Q_1 = A \cdot e^{-\delta_a \cdot t} \cdot \sin(\omega_a \cdot t + \varphi_a) + B \cdot e^{-\delta_b \cdot t} \cdot \sin(\omega_b \cdot t + \varphi_b).$$

Im besonderen gilt diese Gleichung für reelle Werte von ω_a und ω_b im unteren Dämpfungsbereich. Im mittleren Dämpfungsbereich können wir unter Berücksichtigung von (Gl. 5) (S. 215) die Lösung in der Form schreiben

$$(3) \quad Q_1 = A \cdot e^{-\delta_a \cdot t} \cdot \text{Sin}(\beta_a \cdot t + \varphi_a) + B \cdot e^{-\delta_b \cdot t} \sin(\omega_b \cdot t + \varphi_b).$$

Im oberen Dämpfungsbereich läßt sie sich durch die Gleichung darstellen

$$(4) \quad Q_1 = A \cdot e^{-\delta_a \cdot t} \cdot \text{Sin}(\beta_a \cdot t + \varphi_a) + B \cdot e^{-\delta_b \cdot t} \text{Sin}(\beta_b \cdot t + \varphi_b).$$

$A, B, \varphi_a, \varphi_b$ sind die aus den Anfangsbedingungen zu ermittelnden Integrationskonstanten.

Die Lösungen in den Grenzfällen erhält man durch einen „vorsichtigen“ Grenzübergang $\omega_a(w_a) \rightarrow 0$, $\omega_b(w_b) \rightarrow 0$ bzw. $\beta_a(v_a) \rightarrow 0$, $\beta_b(v_b) \rightarrow 0$ aus Gl. (2) oder (3). Im unteren Grenzfall ergibt sich

$$(5) \quad Q_1 = A \cdot e^{-\delta_a \cdot t} \cdot (t + \tau_a) + B \cdot e^{-\delta_b \cdot t} \cdot \sin(\omega_b \cdot t + \varphi_b),$$

im oberen Grenzfall

$$(6) \quad Q_1 = A \cdot e^{-\delta_a \cdot t} \cdot \text{Sin}(\beta_a \cdot t + \varphi_a) + B \cdot e^{-\delta_b \cdot t} \cdot (t + \tau_b).$$

An Stelle von φ wurden die Integrationskonstanten τ eingeführt, die ihrer physikalischen Bedeutung nach die Dimension einer Zeit haben.

Die Berechnung der Kopplungswerte der Widerstands- und Frequenzzahlen als Funktionen von r_0

Die Kopplungswerte der Widerstands- und Frequenzzahlen erscheinen als die reellen und imaginären Komponenten der Wurzeln γ_1 bis γ_4 der verallgemeinerten Stammgleichung. Unter Benutzung der Beziehungen zwischen den Wurzeln und Koeffizienten der Gleichung entsprechend den symmetrischen Grundfunktionen schreiben wir

$$(1) \quad \Sigma \gamma_n = -2 \cdot (r_a + r_b) = -2 \cdot r_0 \cdot h_1,$$

$$(2) \quad \Sigma \gamma_n \cdot \gamma_n = r_a^2 + w_a^2 + r_b^2 + w_b^2 + 4 \cdot r_a \cdot r_b = h_2 + 4 \cdot r_0^2 \cdot a_2,$$

$$(3) \quad \Sigma \gamma_n \cdot \gamma_n \cdot \gamma_n = (r_a^2 + w_a^2) \cdot (-2 \cdot r_b) + (r_b^2 + w_b^2) \cdot (-2 \cdot r_a) = -2 \cdot r_0 \cdot h_3,$$

$$(4) \quad \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4 = (r_a^2 + w_a^2) \cdot (r_b^2 + w_b^2) = a_1.$$

Mit der zunächst noch unbekannten Funktion

$$(5) \quad y = f(r_0) = r_a^2 + w_a^2 + r_b^2 + w_b^2$$

und den Gl. (1), (2) und (4) können wir jetzt r_a, r_b, w_a, w_b als Funktionen von r_0 und y ausdrücken. Wir erhalten

$$(6) \quad \begin{cases} 2 \cdot r_a = h_1 \cdot r_0 + \sqrt{y - h_2 + r_0^2 \cdot (h_1^2 - 4 \cdot a_2)} \\ \quad = r_0 \cdot \left(h_1 + \sqrt{\frac{y - h_2}{r_0^2} + h_1^2 - 4 \cdot a_2} \right), \\ 2 \cdot r_b = h_1 \cdot r_0 - \sqrt{y - h_2 + r_0^2 \cdot (h_1^2 - 4 \cdot a_2)} \\ \quad = r_0 \cdot \left(h_1 - \sqrt{\frac{y - h_2}{r_0^2} + h_1^2 - 4 \cdot a_2} \right), \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 4 \cdot w_a^2 = y + h_2 - 2 \cdot \sqrt{y^2 - 4 \cdot a_1} \\ \quad - 2 \cdot r_0^2 \left(h_1^2 - 2 \cdot a_2 + h_1 \sqrt{\frac{y - h_2}{r_0^2} + h_1^2 - 4 \cdot a_2} \right), \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} 4 \cdot w_b^2 = y + h_2 + 2 \cdot \sqrt{y^2 - 4 \cdot a_1} \\ \quad - 2 \cdot r_0^2 \left(h_1^2 - 2 \cdot a_2 - h_1 \sqrt{\frac{y - h_2}{r_0^2} + h_1^2 - 4 \cdot a_2} \right). \end{cases}$$

Die Funktion $y = f(r_0)$

Setzt man die in (6) und (7) gefundenen Werte in die Gl. (3) (S. 216) ein, so erhält man zur Bestimmung von y die kubische Gleichung

$$(1) \quad \begin{cases} y^3 - y^2 \cdot (h_2 + 4 \cdot r_0^2 \cdot a_2) - 4 \cdot y \cdot (a_1 - r_0^2 \cdot h_1 \cdot h_2) \\ \quad + 4 \cdot [a_1 \cdot h_2 + r_0^2 \cdot (4 \cdot a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot h_1^2 - h_2^2)] = g(r_0, y) = 0. \end{cases}$$

Sie entspricht der kubischen Resolvente der Kiebitzschens Lösung. In expliziter Form schreiben wir

$$(2) \quad r_0^2 = \varphi(y) = \frac{(y^2 - 4 \cdot a_1) \cdot (y - h_2)}{\left[y - \frac{h_1 \cdot h_2}{2 \cdot a_2} \cdot (1 + W) \right] \cdot \left[y - \frac{h_1 \cdot h_2}{2 \cdot a_2} \cdot (1 - W) \right] \cdot 4 a_2},$$

wo

$$(3) \quad W = \sqrt{\left(1 - \frac{4 a_2}{h_1^2} \right) \left(1 - \frac{4 a_1 a_2}{h_2^2} \right)}$$

ist.

Die Funktion $\varphi(y)$ hat die drei Nullstellen

$$(4) \quad y_1 = +\sqrt{a_1}; \quad y_2 = -\sqrt{a_1}; \quad y_3 = h_2$$

und die beiden Unendlichkeitsstellen

$$(5) \quad y_4 = \frac{h_1 \cdot h_2}{2 \cdot a_2} \cdot (1 - W); \quad y_5 = \frac{h_1 \cdot h_2}{2 \cdot a_2} \cdot (1 + W).$$

Geometrisch werden durch Gl. (1) drei stetig verlaufende Kurvenzweige dargestellt, die an den Unendlichkeitsstellen y_4 und y_5 voneinander getrennt sind. Für die weiteren Untersuchungen ist der Teil des Kurvenzweiges, der zwischen y_2 und y_4 verläuft, von Bedeutung. Den y -Werten dieses Bereiches entspricht in umkehrbar

V
4
1

1
9
4
2

XUM

eindeutiger Zuordnung die Wertereihe r_0^2 von 0 bis $+\infty$; und zwar nimmt y_4 mit wachsender Verstimmung stetig ab. Dies ergibt sich, wenn man y in der Form schreibt

$$(6) \quad y_4 = \frac{1}{2 \cdot a_2} \cdot (h_1 \cdot h_3 - \sqrt{(h_1^2 - 4 \cdot a_1) \cdot (h_3^2 - 4 \cdot a_2)})$$

und berücksichtigt, daß h_1 und h_3 mit wachsender Verstimmung stetig zunehmen. Für abgestimmte Kreise ($\varepsilon = \rho = 1$) wird

$$(7) \quad y_4 = y_3 = h_2,$$

wie man durch Einsetzen der entsprechenden Werte für h_1 und h_3 erkennt.

Für alle Werte r_0 des Bereiches

$$(8) \quad 0 \leq r_0 \leq +\infty$$

ist

$$(9) \quad y = h_2 = \text{const}$$

diejenige der drei Wurzeln der kubischen Gl. (1) (S. 217), die allein als Lösung der verallgemeinerten Stammgleichung zu verwenden ist, wie sich durch Einsetzen in die symmetrischen Grundfunktionen 1–4 (S. 216) ergibt.

Ebenso erkennt man, daß bei verstimmten Kreisen ($\varepsilon > 1$, $\rho > 1$) die zur Lösung der verallgemeinerten Stammgleichung in Betracht kommenden y -Werte mit den zugeordneten Werten von r_0^2 und r_0 in dem Bereiche

$$(10) \quad y_4 \leq y \leq y_3$$

liegen. Damit ergibt sich, daß in diesem Bereich r_0 und die Kopplungsgrößen r_a, r_b, w_a, w_b als Funktionen des Parameters y und mittelbar die Kopplungsgrößen als Funktionen von r_0 dargestellt werden können. Die weiteren Zusammenhänge seien zunächst für den Fall abgestimmter Kreise erörtert.

Diskussion der Lösung für den Fall abgestimmter Kreise

In abgestimmten Kreisen gilt nach Gl. (9) (S. 218) die Gleichung

$$(1) \quad y = r_a^2 + w_a^2 + r_b^2 + w_b^2 = h_2 = \text{const.}$$

Dieser Satz ist jedoch nicht umkehrbar, wie sich weiter unten (S. 221) zeigen wird. Unter Berücksichtigung der im Abstimmungsfall geltenden Gleichungen

$$(2) \quad \varepsilon = \rho = 1$$

und

$$(3) \quad g_1 = g_2 = g_3 = 2$$

wird nach den Gl. (21) (S. 214)

$$(4) \quad h_1 = 2 \cdot \frac{1 - x_R x_L}{1 - x_L^2}; \quad h_2 = 2 \cdot \frac{1 - x_L x_C}{1 - x_L^2}; \quad h_3 = 2 \cdot \frac{1 - x_R x_C}{1 - x_L^2}.$$

Für die Kopplungswerte der Widerstandszahlen erhalten wir die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} r_a = \frac{1}{2} \cdot (h_1 + \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}) = r_0 \cdot \frac{1 - x_R}{1 - x_L}, \\ r_b = \frac{1}{2} \cdot (h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}) = r_0 \cdot \frac{1 + x_R}{1 + x_L}. \end{cases}$$

Die Kurven der Widerstandszahlen sind Gerade.

Die Gleichungen der Frequenzzahlkurven lauten [nach den Gl. (7) (S. 217)]

$$(6) \quad \begin{cases} 4 \cdot w_a^2 = 2 \cdot h_2 - 2 \cdot \sqrt{h_2^2 - 4 \cdot a_1} - 2 \cdot r_0^2 \cdot (h_1^2 - 2 \cdot a_2 + h_1 \cdot \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}) \\ \quad = 4 \cdot \left[\frac{1 - x_C}{1 - x_L} - r_0^2 \cdot \left(\frac{1 - x_R}{1 - x_L} \right)^2 \right], \\ 4 \cdot w_b^2 = 2 \cdot h_2 + 2 \cdot \sqrt{h_2^2 - 4 \cdot a_1} - 2 \cdot r_0^2 \cdot (h_1^2 - 2 \cdot a_2 - h_1 \cdot \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}) \\ \quad = 4 \cdot \left[\frac{1 + x_C}{1 + x_L} - r_0^2 \cdot \left(\frac{1 + x_R}{1 + x_L} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Für reelle Werte von w_a und w_b sind die Frequenzzahlkurven Ellipsen, für imaginäre Hyperbeln; die Widerstandszahlgeraden sind Asymptoten der Hyperbeln. Die Frequenzzahlen an den Stellen $r_0 = 0$ bezeichnen wir mit w_{a0} und w_{b0} , dann ist

$$(7) \quad \begin{cases} w_{a0} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (h_2 - \sqrt{h_2^2 - 4 \cdot a_1})} = \sqrt{\frac{1 - x_C}{1 - x_L}}, \\ w_{b0} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (h_2 + \sqrt{h_2^2 - 4 \cdot a_1})} = \sqrt{\frac{1 + x_C}{1 + x_L}}. \end{cases}$$

Die Grenzwiderstandswerte r_{0g1} und r_{0g2} erhalten wir, wenn wir in Gl. (6) $w_a = 0$ und $w_b = 0$ setzen:

$$(8) \quad r_{0g1} = \frac{\sqrt{(1 - x_L) \cdot (1 - x_C)}}{1 - x_R}; \quad r_{0g2} = \frac{\sqrt{(1 + x_L) \cdot (1 + x_C)}}{1 + x_R}.$$

Die Kopplungswerte r_{ag} und r_{bg} der Widerstandszahlen ergeben sich, wenn man in Gl. (5) $r_0 = r_{0g1}$ und $r_0 = r_{0g2}$ setzt.

$$(9) \quad r_{ag} = \sqrt{\frac{1 - x_C}{1 - x_L}}; \quad r_{bg} = \sqrt{\frac{1 + x_C}{1 + x_L}}.$$

Diese Werte stimmen mit w_{a0} und w_{b0} überein.

Unter Benutzung der Gl. (8) und (9) lassen sich die Gleichungen der Frequenzzahlkurven je nach dem Dämpfungsbereich in der übersichtlichen Form schreiben:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{r_0^2}{r_{0g1}^2} + \frac{w_a^2}{w_{a0}^2} - 1 = 0, \\ \frac{r_0^2}{r_{0g2}^2} + \frac{w_b^2}{w_{b0}^2} - 1 = 0; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{r_0^2}{r_{0g1}^2} - \frac{v_a^2}{v_{a0}^2} - 1 = 0, \\ \frac{r_0^2}{r_{0g2}^2} - \frac{v_b^2}{v_{b0}^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Die Abhängigkeit der Kopplungsgrößen r_a , r_b , $w_a(v_a)$, $w_b(v_b)$ von r_0 für abgestimmte Kreise läßt sich aus dem Schaubild (Abb. 1) S. 221 erkennen. Es sei noch auf einige Sonderfälle hingewiesen: Für $x_g = x_L$ fallen die beiden Widerstandsgeraden zusammen; und zwar wird

$$(13) \quad r_a = r_b = r_0.$$

Die Frequenzzahlellipsen werden Kreise:

$$(14) \quad \begin{cases} r_0^2 + w_a^2 = \frac{1 - x_C}{1 - x_L} = w_{a0}^2, \\ r_0^2 + w_b^2 = \frac{1 + x_C}{1 + x_L} = w_{b0}^2. \end{cases}$$

Die Frequenzzahlhyperbeln werden gleichseitig.

Für $x_R = x_L = x_C$ fallen nicht nur die Widerstandszahlgeraden zusammen, sondern auch die Frequenzzahlkurven. Diese werden Einheitskreise bzw. Einheitshyperbeln.

Auch der Fall $x_L = x_C$ bei beliebigen positiven Werten von r_0 läßt sich leicht an Hand der vorstehenden Gleichungen übersehen. Er beansprucht jedoch weniger Interesse bei abgestimmten als in dämpfungsverstimmten Kreisen ($\varepsilon = 1$; $\varrho > 1$). In diesem Falle ergibt sich nämlich

$$(15) \quad g_1 = g_2 = g = \varrho + \frac{1}{\varrho}; \quad g_2 = 2,$$

$$(16) \quad h_1 = h_2 = h = \frac{g - 2 \cdot x_R x_L}{1 - x_L^2}; \quad h_2 = 2 \cdot \frac{1 - x_C^2}{1 - x_L^2} = 2,$$

$$(17) \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1 - x_R^2}{1 - x_L^2},$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} y_4 &= \frac{h_1 \cdot h_2}{2 \cdot a_2} \cdot (1 - W) = \frac{h^2}{2 \cdot a_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{h^2} \cdot \sqrt{(h^2 - 4a_2) \cdot (h^2 - 4a_1 a_2)}\right) = 2. \end{aligned} \right.$$

Abb. 3

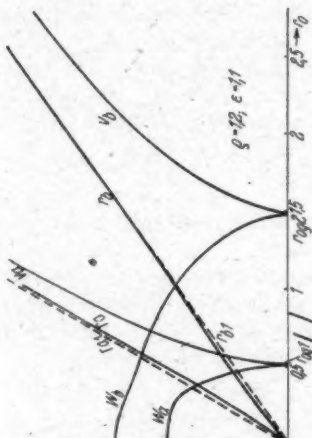


Abb. 4



Abb. 1

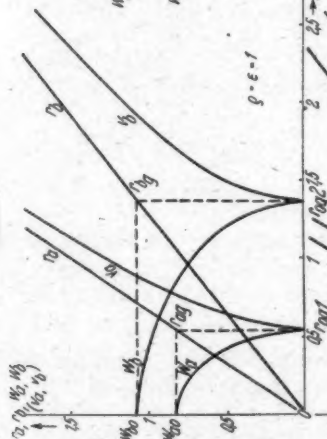
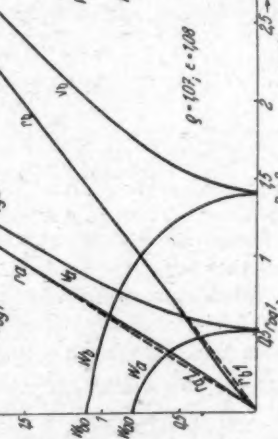


Abb. 2



Aus der Übereinstimmung von $y_3 = h_2$ und y_4 ergibt sich die Konstanz von y für alle Werte r_0 zwischen 0 und $+\infty$, obwohl die Kreise verstimmt sind. Die Konstanz von y ist demnach kein entscheidendes Merkmal für die Abgestimmtheit zweier Kreise.

V
4
1

1
9
4
2
XUM

Diskussion der Lösung für verstimmte Kreise

Die Kurven der Widerstandszahlen [Gl. (6) S. 217] weichen von der Form der Geraden ab, und zwar um so mehr, je größer $|y - h_2|$ gegenüber dem Produkt $r_0^2 \cdot (h_1^2 - 4 \cdot a_2)$ ist, d. h. je größer der Verstimmungsgrad ist. Für einen gegebenen Verstimmungsgrad läßt sich nun ein Wert $r_0 = r_{0m}$ so bestimmen, daß für alle Werte $r_0 \geq r_{0m}$ der Betrag $|y - h_2|$ gegenüber $r_0^2 \cdot (h_1^2 - 4 \cdot a_2)$ vernachlässigbar klein wird. Von diesem Werte r_{0m} an verlaufen die Widerstandszahlkurven geradlinig, und zwar stimmt ihr Verlauf mit dem der Geraden

$$(1) \quad \begin{cases} 2 \cdot r_{a1} = r_0 \cdot (h_1 + \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}), \\ 2 \cdot r_{b1} = r_0 \cdot (h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}) \end{cases}$$

überein.

Die Frequenzzahlkurven gehen für $r_0 \geq r_{0m}$ in die Ellipsen- bzw. Hyperbelform über, und die Geraden (1) werden Asymptoten der Hyperbeln, wie weiter unten gezeigt wird. Da für die zur Lösung in Betracht kommenden Werte y der Ausdruck

$$(2) \quad y - h_2 \leq 0$$

ist, so liegen die r_a -Werte unterhalb, die r_b -Werte oberhalb der entsprechenden Asymptotenwerte. Diese Abweichungen an den einzelnen Stellen r_0 sind einander gleich. Es ist

$$(3) \quad |r_a - r_{a1}| = |r_b - r_{b1}|,$$

da

$$(4) \quad r_a + r_b = r_{a1} + r_{b1} = h_1 \cdot r_0.$$

An der Stelle $r_0 = 0$ verschwindet der Ausdruck $y - h_2$, daher ist wie im Fall abgestimmter Kreise

$$(5) \quad r_a = r_b = 0 \quad (r_0 = 0).$$

Die Kurven der Widerstandszahlen gehen wie die Asymptoten durch den 0-Punkt.

Für $r_0 \geq r_{0m}$ gilt weiter

$$(6) \quad r_a^2 + w_a^2 + r_b^2 + w_b^2 = \text{const} = y_4.$$

Die Gleichungen der Frequenzkurven (nur die Gleichungen der Frequenzhyperbeln seien angegeben) nehmen die Form an

$$(7) \quad \begin{cases} 4 \cdot v_a^2 = -(y_4 + h_2) + 2 \cdot \sqrt{y_4^2 - 4 \cdot a_1} \\ \quad + 2r_0^2 \cdot (h_1^2 - 2a_2 + h_1 \cdot \sqrt{h_1^2 - 4a_2}), \\ 4v_b^2 = -(y_4 + h_2) - 2\sqrt{y_4^2 - 4a_1} \\ \quad + 2r_0^2 \cdot (h_1^2 - 2a_2 - h_1 \cdot \sqrt{h_1^2 - 4a_2}). \end{cases}$$

Für $r_0 \rightarrow \infty$ gehen sie in die Form über

$$(8) \quad \begin{cases} 2 \cdot v_a = r_0 \cdot (h_1 + \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}), \\ 2 \cdot v_b = r_0 \cdot (h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4 \cdot a_2}). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den Gl. (1) (S. 222) der Asymptoten überein.

Je weniger verstimmt die Kreise sind, um so kleiner wird r_{0m} . Bestimmt man aus Gl. (7) (S. 222) r_{0g1} und r_{0g2} durch Nullsetzen von v_a bzw. v_b , und gilt dann

$$(9) \quad r_{0m} \leq r_{0g1},$$

so wollen wir die Kreise als „mäßige“ verstimmt bezeichnen. Da sich in diesem Falle auch r_{ag} , r_{bg} , w_{a0} und w_{b0} leicht bestimmen lassen, so ist eine Übersicht über den größten Teil des Verlaufs der Kopplungsgrößen r_a , r_b , w_a , w_b in ihrer Abhängigkeit von r_0 möglich.

Als „wenig“ verstimmt sollen solche Schwingkreise bezeichnet werden, in denen die Verstimmungszahlen nur wenig größer als 1 sind. Wir setzen hier

$$(10) \quad \varrho = 1 + \Delta\varrho, \quad \varepsilon = 1 + \Delta\varepsilon,$$

wo

$$(11) \quad \Delta\varrho \ll 1, \quad \Delta\varepsilon \ll 1$$

sein soll. Bei solch kleinen Verstimmungen bleiben die Werte g_1 , g_2 , g_3 und damit auch h_1 , h_2 , h_3 praktisch unverändert. Wir erhalten in diesem als trivial anzusehenden Falle die gleiche Lösung wie bei abgestimmten Kreisen.

Bei stark verstimmten Kreisen, bei denen

$$(12) \quad r_{0m} > r_{0g1}$$

ist, läßt sich eine Übersicht über den Verlauf der Kopplungsgrößen nur mit Hilfe der Funktionen $r_0^2 = \varphi(y)$ bzw. $r_0 = f(y)$ gewinnen, die sich aber wegen des beschränkten Bereiches der y -Werte leicht darstellen lassen. Die Änderung des Kurvenverlaufs der Kopplungsgrößen bei Vergrößerung der Verstimmung ist in den Schaubildern 2, 3 und 4 dargestellt (S. 221).

Zusammenfassung

Die Stammgleichung der Differentialgleichung der gekoppelten Schwingungen wird auf eine verallgemeinerte Form gebracht, bei der die Koeffizienten allein als Funktionen der Kopplungszahlen κ_L , κ_C , κ_R , der Verstimmungszahlen ε und ϱ sowie einer als Widerstandszahl bezeichneten Dämpfungsgröße r_0 dargestellt werden, während die Kreisfrequenzen selbst nicht mehr auftreten. Die Wurzeln $r_a \pm j \cdot w_a$, $r_b \pm j \cdot w_b$ werden in ihrer Abhängigkeit von r_0 untersucht und in drei Lösungs-(Dämpfungs-)bereiche eingeordnet, die an

den Stellen $r_0 = r_{0,1}$ und $r_0 = r_{0,2}$, den Grenzwiderstandszahlen, voneinander getrennt sind. Je nach dem Dämpfungsbereich sind die als Frequenzzahlen bezeichneten Größen w reell oder imaginär, an den Stellen $r_{0,1}$ und $r_{0,2}$ verschwinden sie, es treten Doppelwurzeln auf. r_0 und die Kopplungsgrößen r_a, r_s, w_a, w_s werden als Funktionen eines Parameters y und mittelbar die Kopplungsgrößen als Funktionen von r_0 dargestellt. y ergibt sich als eine der drei Wurzeln einer kubischen Gleichung. Es wird nun gezeigt, daß, wenn r_0 den Bereich 0 bis $+\infty$ stetig durchläuft, die zur Lösung in Betracht kommenden y -Werte das endliche Intervall y_3 bis y_4 stetig und monoton abnehmend durchlaufen. Zur Berechnung der Intervallgrenzen y_3 und y_4 werden einfache Ausdrücke angegeben. Zwischen den Veränderlichen r_0 und y dieses Bereiches besteht ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang, und die zusammengehörigen Wertepaare r_0 und y lassen sich leicht ermitteln. Die hier in Betracht kommende Funktion wird in expliziter Form angegeben.

Die weiteren Untersuchungen werden zunächst für abgestimmte Kreise durchgeführt, die jedoch nicht gleich gebaut zu sein brauchen. Hier ist $y_3 = y_4$, die Kurven der Widerstandszahlen sind gerade Linien, die Kurven der Frequenzzahlen je nach dem Dämpfungsbereich Ellipsen bzw. Hyperbeln. Die Widerstandsgeraden sind Asymptoten der Hyperbeln. Bei verstimmtten Kreisen weichen die r_a - und r_s -Kurven von dem geradlinigen Verlauf ab, die Frequenzzahlkurven erhalten eine verwickeltere Gestalt. Aber auch hier lassen sich Asymptoten bestimmen, denen sich sowohl die Kurven der Widerstandszahlen wie die der Frequenzzahlen für $r_0 \rightarrow \infty$ beliebig nähern. Für jeden vorgegebenen Verstimnungsgrad läßt sich ein endlicher Wert $r_0 = r_{0,m}$ so bestimmen, daß für alle Werte $r_0 \geq r_{0,m}$ die Kurven der Widerstandszahlen geradlinig verlaufen und die der Frequenzzahlen Ellipsen- bzw. Hyperbelform annehmen. Es werden „mäßig“ verstimmtte Kreise definiert, bei denen $r_{0,m} \leq r_{0,1}$ ist. Hier wird durch die Werte $r_0 \geq r_{0,m}$ und die Werte r_0 in der Umgebung des 0-Punktes der größte Teil der Kopplungsfunktionen erfaßt, so daß sich eine leichte Übersicht über ihren Gesamtverlauf ergibt.

Bei stark verstimmtten Kreisen läßt sich in der gleichen einfachen Weise eine Übersicht über den Teil des Funktionsverlaufs erhalten, für den $r_0 \geq r_{0,m}$ ist. Für den übrigen Teil ist die erwähnte Parameterdarstellung heranzuziehen.

Köln-Lindenthal, Kitschburgerstr. 1.

(Eingegangen 27. Dezember 1941)

**Sondenmessungen in verdünnter,
durch einen Elektronenstrahl ionisierter Luft**
Von Angelika Székely und Edith Zauner

(Mitteilung aus dem I. Physikalischen Institut der Universität Graz)

(Mit 4 Abbildungen)

Einleitung

Für eine Untersuchung der Hochfrequenzleitfähigkeit ionisierter Luft war eine Versuchsanordnung vorhanden, wie sie von einigen Forschern zur Messung des Ionisierungsvermögens von Elektronenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit verwendet wurde (1): durch eine enge Kapillare in der Wand eines geerdeten Metallgehäuses tritt ein Elektronenstrahl. Der Luftdruck im Gehäuse kann nach der Strömungsmethode beliebig eingestellt werden: Luftzufuhr durch ein enges Rohr, das mit einem Vorratsgefäß mit Luft von veränderlichem Druck verbunden ist, Abströmen der Luft durch das Kapillarrohr, das den Elektronenstrahl eintreten läßt. Zur Deutung der Hochfrequenzmessungen war es wünschenswert, möglichst viel über die Art der durch den Elektronenstrahl im Gehäuse erzeugten Ionisierung zu erfahren. Es wurden daher Sondenmessungen ausgeführt, über die im folgenden berichtet wird. Da die Ergebnisse dieser Messungen unabhängig von den Hochfrequenzmessungen, durch die sie veranlaßt wurden, Interesse verdienen, erscheint ihre Wiedergabe in einer eigenen Arbeit gerechtfertigt.

Versuchsanordnung

Das Messinggehäuse, dessen Luftinhalt durch einen Elektronenstrahl ionisiert wurde, hatte die Abmessungen $17 \times 12 \times 12$ cm. Die Kapillare, durch die der Elektronenstrahl eintrat, war 1,7 cm lang und hatte einen Durchmesser von 0,06 cm. Zur Messung der Strahlintensität diente als Faradäykäfig ein Zylinder von 4 cm Höhe und 2 cm Durchmesser mit einer kreisrunden, durch ein Messingdrahtgitter überdeckten Öffnung von 0,4 cm Durchmesser. Dieser Käfig war während der Sondenmessungen hochgezogen u. wurde vorher und nachher dicht vor das kapillare Loch in der Wand des Messinggehäuses herabgelassen und über ein empfindliches Spiegelgalvanometer geerdet. Die dem kapillaren Loch gegenüberliegende Wand des Gehäuses hatte eine Öffnung von 5 cm Durchmesser, die

durch eine mit Fett aufgedichtete Glasplatte verschlossen war; die Sonde, ein Platindraht von 0,16 mm Durchmesser, der mit einer Länge von 2 mm aus dem Glasrohr, in das er eingeschmolzen war, herausragte, wurde durch ein Loch in der Glasplatte in das Gehäuse gesteckt. Es waren ferner zwei weitere Durchführungen durch die Glasplatte vorhanden, durch die Zuleitungsdrähte zu verschiedenen Elektroden im Gehäuse eingeführt werden konnten.

Messungsergebnisse

Die Sondenmessungen wurden in Luft in einem Druckbereich von 0,01—0,10 Torr ausgeführt mit Elektronenstrahlintensitäten von 10^{-7} — 10^{-5} Amp. und Strahlgeschwindigkeiten von 150 bis 1000 eV. Die Elektronenstrahlen waren, je nachdem ob die Zentrierung (abhängig von der Lage der Glühkathode vor der Kapillare und von deren Reinheitsgrad) besser oder schlechter gelungen war, mehr oder weniger homogen. Meist hatte ein hoher Prozentsatz (60 bis 90%) der eintretenden Elektronen einheitliche, der Beschleunigungsspannung entsprechende Geschwindigkeit. Die Sonde wurde in verschiedene Lagen im Gehäuse gebracht.

Überraschenderweise zeigten alle Sondencharakteristiken denselben Verlauf wie die in den hochionisierten Metaldämpfen oder Edelgasen der Bogenentladungen beobachteten, die als kennzeichnend für ein „Plasma“ angesehen werden, d. h. für ein ionisiertes Gas, das im großen ganzen neutral ist und in dem die negativen Elektrizitätsträger vorwiegend freie Elektronen sind, deren Geschwindigkeiten nach dem Maxwell'schen Gesetz verteilt sind. Aus diesem bemerkenswerten Ergebnis kann gefolgert werden, daß der durch einen Elektronenstrahl in verdünnter Luft geschaffene Ionisationszustand trotz der 1000—10000mal kleineren Trägerdichte die Eigenschaften eines Plasmas besitzt. Elektronentemperatur und Dichte in diesem Plasma hängen in hohem Maß davon ab, was mit dem das Plasma erzeugenden Elektronenstrahl beim Auftreffen auf die Wand des Gehäuses geschieht.

Zum Beweis dafür, daß die in der schwach ionisierten Luft aufgenommenen Sondencharakteristiken in dem angegebenen Sinn ausgelegt werden können, sollen 6 Beispiele dienen, die in den Abb. 1 bis 3 wiedergegeben sind; sie wurden aus einer großen Zahl von Messungen so ausgewählt, daß möglichst verschiedenartige Versuchsbedingungen zur Darstellung kommen.

Alle Kurven, in denen wie üblich die positiven Sondenspannungen als Abszissen, die Logarithmen der Sondenströme als Ordinaten aufgetragen sind, zeigen deutlich den geradlinigen ersten Ver-

lauf, der bei Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen erhalten wird, und ein scharfes Abbiegen von dieser Geraden beim Überschreiten des Raumpotentials. Dieses wurde in der Weise bestimmt, daß die durch die Meßpunkte bei niedrigen Spannungen bestimmte Gerade mit der Geraden, die man durch die Meßpunkte bei hohen Spannungen legen kann, zum Schnitt gebracht und die dem Schnittpunkt entsprechende Abzisse abgelesen wurde. Eine Korrektur der Sondenströme bei kleinen positiven Sondenspannungen wegen eines überlagerten Stromes positiver Ionen erübrigte sich, da die bei schwachen negativen Sondenspannungen gemessenen Ionenströme vernachlässigbar klein waren.

Aus der Neigung des ersten geradlinigen Teiles der Sondencharakteristik wurde in der bekannten Weise (2) die Elektronentemperatur T , sowie die ihr entsprechende Elektronengeschwindigkeit V_T in Volt und aus dem Strom i_0 beim Raumpotential V_E die Elektronendichte n berechnet.

Die Versuchsergebnisse sowie die Versuchsbedingungen, die auch aus den Abbildungsunterschriften entnommen werden können, sind in der Tabelle zusammengestellt. Um die bei verschiedenen Drucken p , Strahlgeschwindigkeiten V und Strahlstärken E beobachteten Elektronendichten n miteinander vergleichen zu können, wurde eine „reduzierte Dichte“ n/pE , die ebenfalls in der Tabelle verzeichnet ist, berechnet. Diese Reduktion der Dichte auf den Druck 1 Torr und die Strahlstärke 1 Amp. ist möglich, da genaue Proportionalität der Elektronendichte mit dem Druck und der Strahlstärke festgestellt wurde, wenn die Aufnahmen der Charakteristiken bei verschiedenen Drucken und Strahlstärken unmittelbar nacheinander ausgeführt wurden. Bei solchen

Tabelle

	p mm	V Volt	E 10^{-8} Amp.	V_E Volt	i_0 10^{-8} Amp.	T °K	V_T Volt	n 10^{11} cm^{-3}	n/pE 10^{14}	Datum	Versuchsbedingungen
Abb. 1a	0,027	600	21	142	37	124000	16,3	4,27	7,52	17.11.39	Hinterwand Glasplatte, Sonde in der Mitte
Abb. 1b	0,023	600	13,4	62	20,9	54600	7,1	3,72	12,0	7. 2. 40	
Abb. 1c	0,027	450	54	54	128	45800	5,9	24,1	16,6	27. 1. 40	Hinterwand berußte Metallplatte, Sonde in der Mitte
Abb. 2a	0,029	600	35,5	9,3	9,2	21100	2,7	2,55	2,47	1.11.40	
Abb. 2b	0,032	600	45,2	5,2	1,7	19900	2,5	0,50	0,35	2. 4. 41	
Abb. 3	0,020	155	890	10	0,7	65100	8,4	1,06	0,06	5. 6. 41	Wie bei Abb. 2b, aber Elektronenstrahl diffus

Meßserien zeigte sich ferner Unabhängigkeit der Elektronentemperatur und des Raumpotentials von Druck und Strahlstärke.

Die aus der Tabelle ersichtlichen großen Unterschiede in den Werten des Raumpotentials, der Elektronentemperatur und der

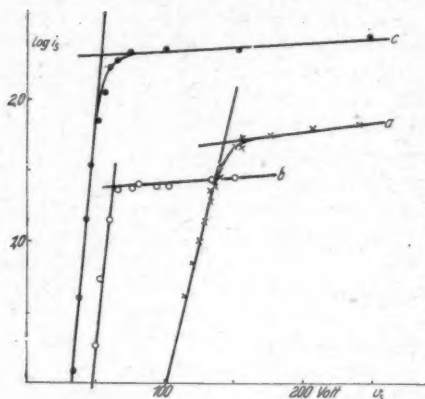


Abb. 1.

a) $p = 0,027$ Torr
 $V = 600$ Volt
 $E = 21 \cdot 10^{-8}$ Amp.

b) $p = 0,023$ Torr
 $V = 600$ Volt
 $E = 13,4 \cdot 10^{-8}$ Amp.

c) $p = 0,027$ Torr
 $V = 450$ Volt
 $E = 54 \cdot 10^{-8}$ Amp.

Hinterwand Glasplatte,
 Sonde in der Mitte

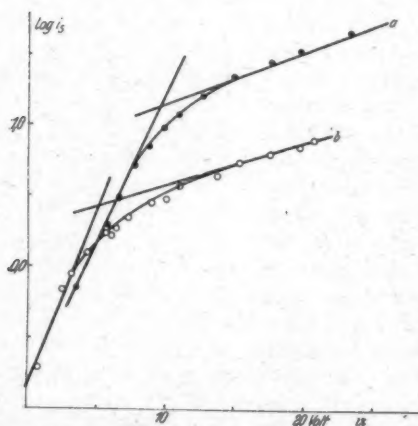


Abb. 2.

a) $p = 0,029$ Torr
 $V = 600$ Volt
 $E = 35,5 \cdot 10^{-8}$ Amp.

Hinterwand durch berußte
 Messingplatte abgedeckt,
 Sonde in der Mitte

b) $p = 0,032$ Torr
 $V = 600$ Volt
 $E = 45,2 \cdot 10^{-8}$ Amp.

Hinterwand mit Faraday-
 käfig, Sonde seitlich in der
 Mitte eines Platten-
 kondensators

reduzierten Dichte sind zum großen Teil durch die verschiedene Beschaffenheit der Auftreffstelle des Elektronenstrahls bei den verschiedenen Versuchen bedingt. Solange der Strahl auf die Glasplatte, deren Oberfläche wegen der eingekitteten Durchführungen und der zum Aufdichten nötigen Schmierung ganz uneinheitlich war, auftraf,

wurden bei Wiederholung der Messungen Änderungen der das Plasma bestimmenden Größen beobachtet, sobald eine Änderung in der Strahl-Zentrierung und -Konzentration (verursacht durch Einsetzen einer neuen Glühkathode oder durch oberflächliche Änderung der kapillar durchbohrten Anode durch die Erwärmung beim Betrieb) eintrat.

Abb. 3.

$$p = 0,020 \text{ mm}$$

$$V = 155 \text{ Volt}$$

$$E = 880 \cdot 10^{-8} \text{ Amp.}$$

Hinterwand und Sonde
wie in Abb. 2b,
Elektronenstrahl diffus

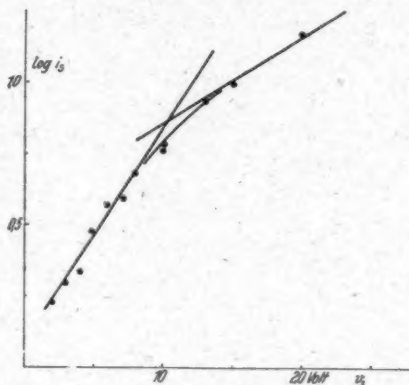


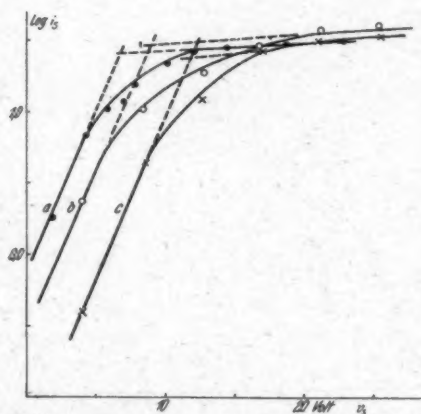
Abb. 4.

$$p = 0,020 \text{ Torr}$$

$$V = 600 \text{ Volt}$$

$$E = 30,3 \cdot 10^{-8} \text{ Amp.}$$

Zur Änderung
des Raumpotentials
während der Messung



Die Abb. 1 gibt drei Kurven wieder, bei denen der Elektronenstrahl auf die Glasplatte auffiel. Bei den beiden Kurven a und b hatten die Primärelektronen Geschwindigkeiten entsprechend 600 Volt Beschleunigungsspannung. Die Plasmaelektronen hatten im Fall a bedeutend höhere Geschwindigkeiten als im Fall b (vgl. die Werte

von T und V_T in der Tabelle). Zur Erklärung muß angenommen werden, daß die Auftreffstelle der Primärelektronen bei den beiden zeitlich weit auseinanderliegenden Messungen von verschiedener Beschaffenheit war und daher die Primärelektronen in verschiedener Weise diffus „reflektierte“. Hand in Hand mit der geringeren Temperatur der Plasmaelektronen im Fall b geht eine Zunahme der reduzierten Dichte. Die Kurve c bezieht sich auf eine Messung mit 450 Volt-Primärelektronen, die einige Tage vor der Beobachtung der Kurve b erfolgte, zwischen beiden Messungen wurde keine Änderung der Zentrierung der Glühkathode und kein Lufteinlaß vorgenommen; die Elektronentemperatur ist daher im Fall c nur wenig verschieden von der im Fall b ; daß sie etwas kleiner ist, kann wohl auf die kleinere Geschwindigkeit der Primärelektronen zurückgeführt werden. Auch die größere reduzierte Dichte ist wohl dadurch zu erklären, da das mittlere Ionisierungsvermögen der Primärelektronen von 450 Volt Geschwindigkeit größer ist als das von Primärelektronen von 600 Volt Geschwindigkeit.

Bei der Aufnahme der beiden Kurven der Abb. 2 war Sorge dafür getroffen, daß der Elektronenstrahl an der Rückwand des Gehäuses völlig absorbiert wurde. Für die Kurve a war die Glasplatte mit den Durchführungen möglichst vollständig durch eine berußte Metallplatte verdeckt. Für die Kurve b endete der Strahl in einem kleinen Faradaykäfig, dessen Vorderwand noch durch eine berußte Metallplatte vergrößert war, um die Glasplatte ganz abzudecken, so daß auch bei diffusem Strahlverlauf alle Primärelektronen abgefangen werden. Es ergaben sich in beiden Fällen niedrige Elektronentemperaturen um 20000°K , wie sie nach den Messungen von Frey (3) zu erwarten sind, wenn nur die durch die Primärelektronen im Gas erzeugten Sekundärelektronen im Plasma vorhanden sind. Damit ist die Annahme bewiesen, daß bei den Versuchsbedingungen, wie sie den Kurven der Abb. 1 zugrunde lagen, die auf die Glasplatte auffallenden Primärelektronen eine große Zahl diffus „reflektierter“ Sekundärelektronen mit wenigstens teilweise recht erheblichen Geschwindigkeiten (4) aus der Glasplatte loslösen. Auch die Tatsache, daß sich im Fall der Abb. 2 kleinere reduzierte Dichten ergaben als im Fall der Abb. 1, spricht für die Richtigkeit dieser Erklärung. Der Unterschied der aus den beiden Kurven der Abb. 2 errechneten reduzierten Dichten hat zwei Ursachen: für die Kurve a war der Strahlenweg im Gas länger, die Sonde ungefähr in der Mitte des Gehäuses, für die Kurve b war durch den in das Gehäuse einige Zentimeter über die Wand vorragenden Käfig mit Auffangplatte der Weg der Primärelektronen im Gas verkürzt, und überdies befand sich die

Sonde seitlich unten im Gehäuse in der Mitte eines Plattenkondensators (Plattengröße $6,8 \times 2,9$ cm; Abstand 1,7 cm), dessen Platten sicher einen Teil der Plasmaelektronen abfangen und dadurch eine Herabsetzung der Dichte zwischen den Kondensatorplatten bewirken.

Die Abb. 3 gibt eine Messung wieder, bei der die in das Gehäuse eintretenden Elektronen nicht mehr zu einem Strahl konzentriert waren, da die Kapillare, durch die bei den übrigen Versuchen der Strahl in das Gehäuse eintrat, herausgeschraubt war und als Einlaß ein Loch von 5 mm Durchmesser in der Wand des Gehäuses diente. Es ist also wohl anzunehmen, daß die Primärelektronen nach dem Durchgang durch das Loch diffus auseinanderliefen. Es genügte dann der Faradaykäfig mit der Auffangplatte nicht mehr, alle Elektronen zu absorbieren, ein Teil wurde sicher an der Rückwand diffus reflektiert, wodurch die höheren Elektronentemperaturen hervorgerufen wurden.

Zum Schluß soll noch eine interessante Beobachtung wiedergegeben werden, die aus Abb. 4 zu ersehen ist: das Raumpotential änderte sich im Lauf der Messungen allmählich zu höheren Werten. Diese Erscheinung trat besonders deutlich nach einer längeren Meßpause hervor, während der das Metallgehäuse mit Luft von Druck über 0,1 Torr gefüllt war. Die Kurven der Abb. 4 sind die Sondencharakteristiken, die sich a) gleich bei der Wiederaufnahme der Messungen nach längerer Pause, b) nach mehrmaliger Wiederholung der Messungen und c) nach einer 2 tägigen Pause ergaben. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Elektronentemperatur annähernd konstant blieb (ungefähr 20000° K, Versuchsbedingungen wie bei Abb. 2a), daß aber das Raumpotential von 6,7 über 8,9 auf 11,8 Volt stieg. Wahrscheinlich wird die Oberfläche des geerdeten Metallgehäuses durch die Zuwanderung der Elektrizitätsträger während der Messungen oberflächlich geändert, und dadurch zugleich der Spannungsunterschied zwischen Wand und Plasma.

Zusammenfassung und Schlußbemerkung

Der durch ein Elektronenstrahlbündel in verdünnter Luft (0,01 bis 0,10 Torr) geschaffene Ionisationszustand scheint weitgehend ähnlich dem sogenannten Plasmazustand zu sein, der in hochionisierten Metaldämpfen und Edelgasen (Trägerdichte größer als $10^{19}/\text{cm}^3$) beobachtet wird. Das wird daraus geschlossen, daß die Sondencharakteristiken in schwach ionisierter Luft (Trägerdichte ungefähr $10^9/\text{cm}^3$) denselben Verlauf zeigen wie in den viel stärker ionisierten Plasmen.

Die Durchführung von Sondenmessungen auch im Fall einer schwachen Ionisation eines Gases durch Elektronenstrahlen erscheint

daher geeignet, den Ionisationszustand in Abhängigkeit von der besonderen Strahlbeschaffenheit und von sonstigen Versuchsbedingungen genau zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit enthält eine Reihe von Beispielen für die Verwertbarkeit solcher Sondenmessungen.

Von besonderem Interesse scheint die mittels Sondenmessungen festgestellte Tatsache, daß nicht nur dann, wenn das Plasma durch die im Gas erzeugten Sekundärelektronen aufgebaut wird, Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung der Plasmaelektronen (Elektronentemperatur 20000°K) besteht, sondern daß diese Geschwindigkeitsverteilung auch dann auftritt, wenn den durch die Ionisation der Gasatome gebildeten langsamen Sekundärelektronen solche schnellere Elektronen beigemischt werden, die beim Auftreffen der Primärelektronen auf feste Wände entstehen; es stellt sich dann eine bedeutend höhere Temperatur der Plasmaelektronen ein (40000 bis 150000°K , je nach der Beschaffenheit der Auftreffstelle).

Die meisten der bei der Arbeit benützten Apparate waren der einen von uns von der Deutschen Forschungsgemeinschaft überlassen, wofür an dieser Stelle der Dank ausgesprochen wird. Auch Herrn Prof. Dr. Erich Rumpf danken wir, daß er uns die Hilfsmittel des Instituts zur Verfügung stellte.

Literatur

- 1) J. F. Lehmann u. T. H. Osgood, Proc. Roy. Soc. London 115. S. 609. 1927, u. M. Renninger, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 295. 1931.
- 2) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Gasentladungen. Bd. II. S. 25ff.
- 3) F. Frey, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 297. 1937.
- 4) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 228. 1925.

Graz.

(Eingegangen 5. Januar 1942)

Röntgenographische Fouriersynthese von Quarz

Von R. Brill, C. Hermann und Cl. Peters

(Mit 4 Abbildungen)

Über die bei manchen Oxyden vorliegende Bindungsart herrscht bisher noch keine völlige Klarheit. Insbesondere Oxyde vom Typus MeO kristallisieren häufig im Steinsalzgitter, woraus man zu schließen geneigt ist, daß bei solchen Substanzen die Bindung heteropolar sei. Wenn man weiterhin beachtet, daß die Goldschmidtschen Regeln für die Abhängigkeit des Kristallbaues vom Verhältnis der Ionenradien gerade auch bei einer ganzen Reihe von Oxyden sehr gut erfüllt sind, wie z. B. in der Reihe CeO_2 - TiO_2 - SiO_2 , so wird die Ansicht vom Ionencharakter der Bindung bei diesen Substanzen bestärkt. Andererseits vertritt H. G. Grimm¹⁾ die Anschauung, daß in Verbindungen wie Quarz die Bindung homöopolar sei, wofür insbesondere der für die Ionenrefraktion des Sauerstoffs gefundene Zahlenwert von 3,56, der näher an dem des molekularen Sauerstoffs (2,02) als an dem des O^- -Ions (7) liegt, herangezogen wird. Ferner kann man einen Hinweis auch erblicken in der Tatsache, daß wohl ebenso wie bei den Ionen SO_4^- , PO_4^- usw. eine Ausbildung von aufgefüllten Achterschalen um die einzelnen Atome des Radikals entsteht, die die homöopolare Bindung begünstigt. Um nun auf einem experimentellen Wege einen Beitrag zu dieser Frage zu leisten, haben wir eine Fouriersynthese der Elektronendichte des Quarzgitters ausgeführt, über die nachstehend berichtet sei.

Bei einer Fouriersynthese des Quarzgitters ist zu berücksichtigen, daß es kein Symmetriezentrum besitzt, so daß man bezüglich der Projektion auf solche kristallographischen Richtungen beschränkt ist, die parallel zu einer zweizähligen Achse liegen. Glücklicherweise liegen auch nahezu senkrecht zu einer zweizähligen Achse zwei verschiedene Verbindungslinien Si-O des Quarzgitters²⁾, so daß für unsere Fragestellung als Projektionsebene (11 $\bar{2}$ 0) gewählt werden kann.

Besondere Schwierigkeiten hatten wir bei der Auswahl eines Kristalls mit geeigneter Mosaikstruktur. Die natürlichen Quarze, die wir zunächst untersuchten, zeigten alle sehr starke Extinktion.

1) Naturw. 27. S. 1. 1939.

2) Vgl. P. H. Wei, Ztschr. f. Kristallogr. 92. S. 355. 1935.

Ein Versuch, einen solchen Kristall mit starker Extinktion dadurch zu einem ausgeprägten Mosaikkristall zu machen, daß man ihn in piezo-elektrische Schwingungen versetzte, führte nicht zum gewünschten Resultat. Es zeigte sich zwar, daß die Intensitäten verstärkt wurden, wenn die Intensitätsmessung in schwingendem Zustand ausgeführt wurde, jedoch betrugen erstens die Intensitätsverstärkungen nur etwa das 4–5fache des im nicht schwingenden Zustand beobachteten Intensitätswertes, während bei hinreichender Mosaikstruktur die Verstärkungen bei den stärksten Reflexen etwa das 40fache

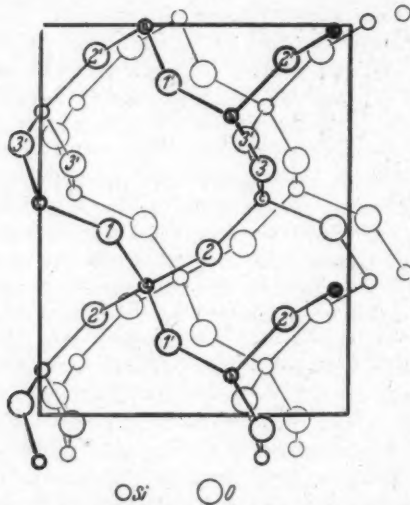


Abb. 1. Quarz, Projektion des Gitters nahezu parallel der zweizähligen Achse. Neigungen φ der Verbindungslinien gegen die Projektionsebene sind: $\varphi = 34'$ für $c - 2$ und $b - 2'$; $\varphi = 6^\circ 43'$ für $c - 1$ und $b - 1'$; $\varphi = 36^\circ$ für $a - 1$, $a - 1'$, $a - 2$ und $a - 2'$

hätten betragen müssen. Zweitens zeigte sich eine starke Abhängigkeit der gemessenen Intensität von der Lage der reflektierenden Ebene im Kristall. Dies hängt zweifellos damit zusammen, daß der Kristall nur in einer bestimmten Richtung schwingt, so daß zwar sozusagen eine Unterteilung in Schichten, jedoch nicht in Mosaikblöcke erfolgt.

Wir versuchten daher, den anderen möglichen Grenzfall, nämlich den des idealen Einkristalles, zu verifizieren, und zwar an einem Quarzkristall, der eine sehr starke Extinktion aufwies. Bei Auswertung der an diesem Exemplar gemessenen Intensitäten mit den Formeln

für den Idealkristall bekamen wir aber F -Werte, die 2–5 mal höher lagen, als sie sich aus Pulveraufnahmen ergaben. Man muß daher annehmen, daß selbst bei diesem ausgesuchten Exemplar unser Strahl noch immer 2–5 Einzelkristalle durchsetzte. Das Experiment zeigte somit, daß der reine Idealfall ebenfalls nicht erreicht werden konnte. Wir entschlossen uns daher, auch solche Kristalle zu untersuchen, die Verunreinigungen enthielten und bei denen daher anzunehmen war, daß ihr Wachstum gestört ist, und fanden schließlich in einem Milchquarz ein Exemplar, das unseren Anforderungen genügte. Auch dieser Kristall zeigte immer noch eine sehr beträchtliche sekundäre Extinktion, die so groß war, daß sie rein rechnerisch¹⁾ nicht eliminiert werden konnte. Wir haben uns schließlich so geholfen, daß wir die Extinktion der Reflexe graphisch ermittelten, indem wir einige spezifische Intensitäten²⁾ Q an einem Quarzpulver maßen und die gefundenen Werte in Abhängigkeit von den formal berechneten spezifischen Kristallintensitäten Q_0 auftrugen³⁾. Durch die so erhaltenen Punkte zogen wir eine Kurve, die uns die Ermittlung des extinktionsfreien Wertes aus einer beliebigen, am Kristall gemessenen Intensität gestattete (vgl. Abb. 2). Die Pulvermessungen an Quarz wurden angeschlossen an Intensitätsmessungen an einem hinreichend feinkristallinen NaCl-Pulver, das durch mehrtägiges Pulverisieren erhalten wurde⁴⁾. Die Pulvermessungen wurden mit $\text{CuK}\alpha$ -Strahlung ausgeführt. Die Absorptionskonstante für das Quarzpulver wurde für $\text{CuK}\alpha$ zu $\mu = 97,8$ bestimmt.

Zur Ausführung der Messungen wurde aus dem Milchquarz eine Platte parallel zu (1120) von der Dicke 0,64 mm geschliffen⁵⁾. An der Platte wurde zunächst der Absorptionskoeffizient μ zu 8,1 (für

1) R. Brill, H. G. Grimm, C. Hermann u. Cl. Peters, Ann. d. Phys. [5] 34. S. 400. 1939.

2) Als „spezifische Intensität“ bezeichnen wir die Größe $Q = \frac{E\omega}{J_0 V}$ (vgl. Intern. Tab. II, S. 560), wo E die von Reflex freigemachte Ionisationsenergie, ω die Winkelgeschwindigkeit, J_0 die Intensität des Primärstrahls, vermindert um die Absorptionsverluste, und V das vom Primärstrahl getroffene Kristallvolumen bedeutet.

3) Ein Fehler dieses Verfahrens liegt in der Vernachlässigung der verschiedenen Strahlwege durch den Kristall. Da aber die Extinktion nur bei Reflexen mit sehr kleinen Glanzwinkeln wesentlich ist, dürfte dieser Fehler bei Reflexen aus der Zone der Plattenormalen hinreichend klein bleiben.

4) Ein Versuch, entsprechend den Vorschlägen amerikanischer Autoren den Anschluß mit Hilfe von Aluminiumpulver mittels der Interferenz 111 vorzunehmen, führte nicht zum Ziel. Wahrscheinlich treten bei derartigen Metallpulvern leicht bevorzugte Kristallorientierungen auf, wenn man aus ihnen ebene Pulverplatten herstellt.

5) Wir danken Herrn Prof. Himmel, Heidelberg, für die Überlassung des Milchquarzes und die Ausführung des Schliffes.

MoK α -Strahlung) bestimmt. Dieser Wert liegt ziemlich niedrig, was sich aber durch den Luftgehalt¹⁾ des Milchquarzes erklärt. (Dieser inhomogene Bau des Kristalls erklärt es auch, daß für sehr kleine Q -Werte Q/Q_0 nicht 1 wird, sondern gegen eine von 1 verschiedene Konstante strebt.) Die Intensitätsmessungen wurden in der früher

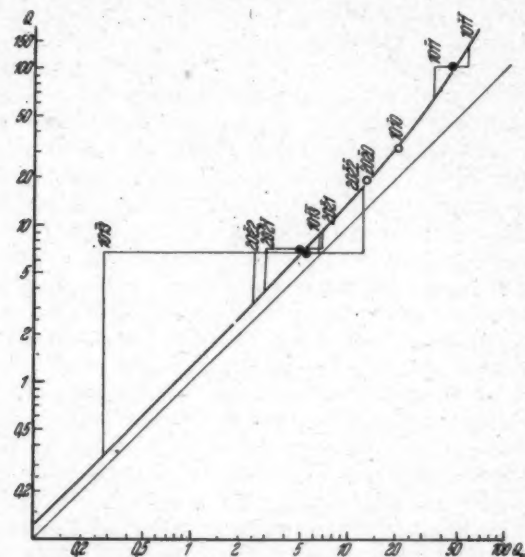


Abb. 2. Graphische Korrektur für Extinktion und inhomogene Absorption der Milchquarzplatte. Leere Kreise stellen eindeutige Eichpunkte dar, ausgefüllte Kreise solche Punkte, bei denen ein Pulverreflex aus mehreren zusammenfallenden ungleichwertigen Reflexen besteht. Die hier markierten Punkte (Schwerpunkt der Kristall- Q_0 -Werte gegen mittleren Pulver- Q -Wert) brauchen nicht exakt auf der Eichkurve zu liegen. Dagegen dienen auch diese Reflexe zur Kontrolle der Kurve, insofern als die Summe der abgelesenen Q -Werte mit dem Pulverwert übereinstimmen muß.

beschriebenen Weise mit monochromatischer MoK α -Strahlung durchgeführt²⁾. Das Ergebnis unserer Messungen ist in Tab. 1 niedergelegt. Dazu ist zu erwähnen, daß wir, um möglichst gut definierte Verhältnisse zu haben, alle Messungen an einer ausgesuchten Stelle der Quarz-

1) Der Milchquarz enthält bekanntlich außerordentlich feinteilige Luft-einschlüsse, die das milchartige Aussehen bewirken. Das Luftvolumen betrug in unserem Fall, wie sich aus der Dichte ergab, 19,1%.

2) Vgl. Ann. d. Phys., a. a. O.

Tabelle 1

Intensitäten, Extinktionsberücksichtigung und-Strukturfaktoren von Quarz,
für die Reflexe $h\ 0\ n\ l$ bezogen auf $F_{000} = 30,0$

h	l	$1/d$	$J \cdot 10^5$	$Q_0 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	F	h	l	$1/d$	$J \cdot 10^5$	$Q_0 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	F
1	0	,236	7,96	20,85	31,8	- 5,17	0	3	,556	1,12	2,94	3,85	+ 2,82
2	0	,471	5,06	13,19	18,4	+ 5,64	1	3	,604	,070	,184	,15	+ ,60
3	0	,707	,746	1,93	2,5	- 2,63	1	3		2,51	6,59	8,7	+ 4,43
4	0	,942	1,06	2,71	3,6	+ 3,24	2	3	,729	8,12	21,00	32,1	+ 9,52
5	0	1,178	0	0	0	0	2	3		2,83	7,32	9,9	+ 5,28
6	0	1,414	,090	,221	,29	+ 1,26	3	3	,899	,480	1,23 ₀	1,6	- 2,42
7	0	1,648	,133	,319	,39	\pm 1,89	3	3		,061	,156	,20	- ,92
8	0	1,885	,0275	,063 ₀	,08	\pm ,69	4	3	1,094	1,41	3,57	4,7	+ 4,73
9	0	2,120	0	0	0	0	4	3		,82	2,075	2,8 ₅	\pm 3,68
							5	3	1,303	,017 ₅	0,43 ₅	,05	\pm ,48
1	1	,300	13,4	35,03	64,8	+ 8,30	5	3		0	0	0	0
1	1		22,6	59,08	142,6	+ 12,36	6	3	1,519	,055	,134	,18	+ 1,14
2	1	,506	2,71	6,94	9,6	- 4,27	6	3		,364	,887	1,16	\pm 3,32
2	1		1,16	2,97	4,0	- 2,75	7	3	1,740	,003 ₁	,007 ₅	,01 ₅	- ,30
3	1	,730	,021	,054	,07	- ,47	7	3		0	0	0	0
3	1		7,34	18,94	27,8	+ 8,86	8	3	1,965	0	0	0	0
4	1	,960	1,78	4,54	6,1	+ 4,92	8	3		0	0	0	0
4	1		,204	,520	,62	- 1,57	9	3	2,191	,043	,096	,12	+ 1,06
5	1	1,192	,014	,035	,04	- ,40	9	3		,004 ₃	,0096	,01 ₂	+ ,33
5	1		,191	,479	,59	+ 1,82							
6	1	1,426	,351	,862	1,12	+ 2,78	1	4	,778	3,06	7,88	10,6	+ 5,69
6	1		,026	,064	,08	- ,75	1	4		,927	2,39	3,2	+ 3,10
7	1	1,660	,0075	,018	,02	\pm ,46	2	4	,879	,537	1,376	1,85	+ 2,56
7	1		,287	,689	,88	+ 2,75	2	4		,021	,054	,07	+ ,52
8	1	1,894	,0564	,131	,17	+ 1,30	3	4	1,024	,222	,564	,69	+ 1,74
8	1		0	0	0	0	3	4		,470	1,193	1,00	+ 2,08
9	1	2,128	,012	,027	,03	- ,55	4	4	1,199	,020	,050	,06	- ,54
9	1		,326	,074	,10	+ ,95	4	4		,191	,479	,61	- 1,83
							5	4	1,392	,048	,118	,15	+ 1,02
1	2	,439	4,77	12,44	17,4	+ 5,22	5	4		,797	1,966	2,6	+ 4,20
1	2		1,33	3,47	4,6	- 2,72	6	4	1,596	,144	,348	,44	\pm 1,90
2	2	,600	,98	2,54	3,4	- 2,76	6	4		,0038	,0092	,012	+ ,31
2	2		4,63	12,64	16,7	+ 6,11	7	4	1,808	,0085	,020	,026	- ,48
3	2	,798	4,22	10,86	12,7	+ 6,31	7	4		,103	,242	,31	+ 1,72
3	2		2,02	5,20	7,0	+ 3,51	8	4	2,025	,088	,203	,26	+ 1,61
4	2	1,013	,047	,119	0,15	\pm ,80	8	4		,023	,053	,65	- ,80
4	2		,541	1,375	1,78	\pm 2,72							
5	2	1,236	1,86	4,65	6,2	+ 5,90	1	5	,957	,758	1,953	2,5	+ 3,17
5	2		,007	,018	,02	- ,36	1	5		2,23	5,69	7,6	+ 5,52
6	2	1,462	,169	,414	,52	- 1,93	2	5	1,040	,015	,038	,046	+ ,41
6	2		,072	,176	,23	\pm 1,28	2	5		,108	,27	,31	+ 1,16
7	2	1,690	,051	,122	,16	\pm 1,18	3	5	1,166	,324	,814	1,08	+ 2,37
7	2		0	0	0	0	3	5		,034	,085	,11	+ ,63
8	2	1,920	,005 ₇	,132	,17	+ 1,29	4	5	1,322	,113	,280	,38	- 1,55
8	2		,022 ₄	,052	,06	- ,80	4	5		,0066	,016 ₄	,22	- ,39
9	2	2,152	,025 ₅	,058	,97	+ ,93	5	5	1,532	,302	,735	,92	+ 2,68
9	2		0	0	0	0	5	5		,024	,058	,73	+ ,76

platte ausgeführt haben, die durch eine besonders gleichmäßige Verteilung der Luftfeinschlüsse gekennzeichnet war. Der gesamte Rest des Kristalls wurde durch ein Messingblech abgedeckt.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

λ	l	$1/d$	$J \cdot 10^5$	$Q_0 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	F	λ	l	$1/d$	$J \cdot 10^5$	$Q_0 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	F
6	5	1,691	,013	,031	,039	+	5	8	1,804	,0176	,041	,051	+
6	5		,171	,408	,51	+	5	8		0	0	0	+
7	5	1,892	,119	,277	,35	+	6	8	2,049	,014	,032	,040	-
7	5		,006	,014	,018	-	6	8		,024	,055	,069	+
8	5	2,100	,018	,415	,52	-	7	8	2,217	,025	,054	,072	+
8	5		,071	,161	,21	+	7	8		0	0	0	0
0	6	1,112	,982	2,480	3,3	+	0	9	1,069	,562	1,346	1,74	+
1	6		,394	,994	1,3	-	1	9	1,086	,017	,041	,051	-
1	6	1,137	,030	,095	,10	\pm	1	9		,032	,076	,099	-
2	6	1,208	,411	1,030	1,3	+	2	9	1,734	,105	,250	,30	+
2	6		1,58	3,89	5,3	+	2	9		,059	,140	,18	+
3	6	1,318	,022	,055	,072	+	3	9	1,812	,019	,045	,056	-
3	6		1,69	,420	,54	-	3	9		,0043	,0101	,0125	-
4	6	1,458	,244	,607	,77	+	4	9	1,916	,0326	,0757	,097	+
4	6		,376	,936	1,19	+	4	9		,0388	,0901	,116	+
5	6	1,620	,004	,0111	,013	+	5	9	2,043	0	0	0	0
5	6		,003	,084	,011	-	5	9		0	0	0	0
6	6	1,798	,127	,299	,37	+	6	9	2,187	,0087	,0190	,025	+
6	6		,014	,033	,039	+	6	9		,014	,0306	,039	+
7	6	1,989	0	0	0	0							
7	6		0	0	0	0	1	10	1,869	,0665	,155	,200	+
8	6	2,188	,044	,0960	,126	-	1	10		,0674	,157	,204	+
8	6		,019	,0414	,052	+	2	10	1,913	,0048	,0111	,014	-
							2	10		,0028	,0065	,0083	-
1	7	1,319	,061	,152	,20	-	3	10	1,984	,0128	,0295	,035	-
1	7		,440	1,090	1,47	+	3	10		,072	,166	,214	+
2	7	1,381	,102	,252	,31	+	4	10	2,080	,0235	,0534	,067	+
2	7		,057	,141	,16	-	4	10		,0109	,0248	,032	-
3	7	1,478	,153	,374	,46	+	5	10	2,196	0	0	0	0
3	7		,453	1,108	1,43	+	5	10		,0067	,0146	,019	+
4	7	1,604	,035	,084	,108	+							
4	7		,0077	,0186	,024	-	1	11	2,040	,0162	,0369	,045	+
5	7	1,753	,020	,047	,058	-	1	11		,0059	,0135	,017	-
5	7		,275	,852	,81	+	2	11	2,053	,008	,0182	,023	-
6	7	1,919	,016	,0379	,047	+	2	11		,0214	,0487	,059	+
6	7		,042	,0980	,125	-	3	11	2,003	,0165	,0371	,045	+
7	7	2,098	,0037	,0084	,0107	-	3	11		,020	,0450	,054	+
7	7		,0218	,0494	,062	+							
1	8	1,502	,328	,800	1,04	+	0	12	2,225	,009	,0196	,026	+
1	8		,133	,324	,39	+							
2	8	1,556	,021	,051	,065	-							
2	8		,006	,0151	,020	\pm							
3	8	1,643	,356	,855	1,12	+							
3	8		,026	,062	,079	-							
4	8	1,757	,022	,0535	,065	-							
4	8		,189	,448	,56	+							

Die Vorzeichen der Fourier-Koeffizienten wurden vorläufig bestimmt aus der von P. H. Wei a. a. O. angegebenen Struktur unter Verwendung der Hartreeschen Strukturfaktoren für Silizium und Sauerstoff. Nach vollzogener Synthese zeigte sich, daß bei einer

Anzahl von Reflexen die Vorzeichen umgekehrt werden mußten, um Nullpunktsunterschreitungen zu vermeiden und die Welligkeit des Untergrundes auf ein Minimum herabzudrücken. Solche Fälle sind in der Tabelle durch doppeltes Vorzeichen angedeutet, wobei das obere Vorzeichen das endgültig gewählte ist. Die Ergebnisse der Synthese

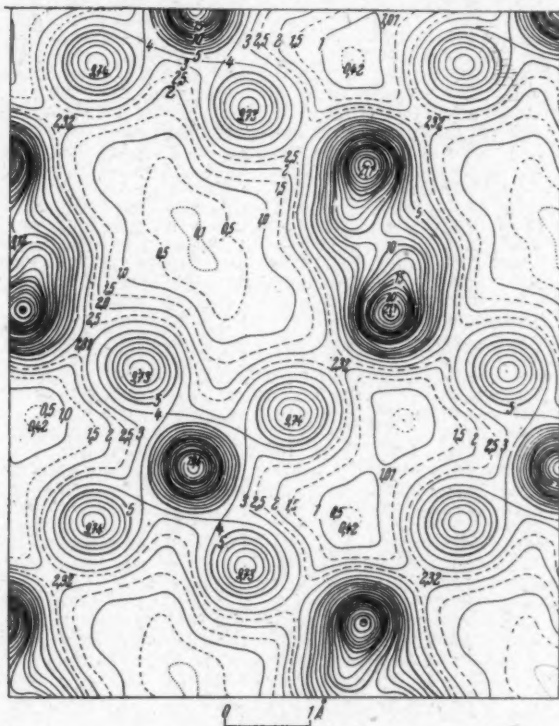


Abb. 3. Projektion der Elektronendichte von Quarz

sind dargestellt in Tab. 2 und Abb. 3. Man erkennt deutlich die isolierten Elektronengipfel, die dem Siliziumatom *a* (vgl. Abb. 1) und den vier es umgebenden Sauerstoffatomen entsprechen. Weniger deutlich stellen sich die Siliziumatome *b* und *c* dar (vgl. Abb. 1) und ebenfalls die Sauerstoffatome 3 und 3', welche letzteren überhaupt nicht als getrennte Maxima in Erscheinung treten. Die günstigste Verbindungslinie ist diejenige vom Si-Atom *c* zum O-Atom 2, da sie

Ta-
Elektronendichte von Quarz, Projektion

1,01	1,01	,98	,96	,96	,94	,93	,94	,99	1,24	1,89	3,26	5,70
1,05	,93	,83	,75	,73	,72	,75	,81	,95	1,31	2,10	3,63	6,30
1,14	,98	,76	,66	,55	,49	,58	,69	,93	1,37	2,22	3,76	6,45
1,26	1,02	,78	,68	,50	,43	,47	,61	,88	1,38	2,21	3,69	6,14
1,38	1,11	,86	,63	,48	,42	,45	,59	,86	1,32	2,11	3,36	5,44
1,50	1,21	,95	,73	,57	,54	,54	,67	,92	1,31	1,93	2,94	4,53
1,63	1,33	1,06	,85	,71	,66	,72	,87	1,11	1,38	1,82	2,55	3,66
1,78	1,44	1,16	,98	,89	,86	,97	1,15	1,37	1,61	1,80	2,23	2,99
1,13	1,60	1,28	1,09	1,06	1,21	1,31	1,52	1,67	1,75	1,87	2,14	2,62
2,13	1,68	1,41	1,22	1,20	1,31	1,47	1,84	2,16	2,35	2,40	2,47	2,58
2,27	1,80	1,55	1,34	1,32	1,45	1,71	2,16	2,62	2,90	2,98	2,98	2,85
2,38	1,96	1,72	1,55	1,49	1,81	1,98	2,54	3,12	3,53	3,67	3,61	3,53
2,43	2,05	1,89	1,76	1,73	1,88	2,32	2,99	3,60	4,34	4,56	4,50	4,11
2,45	2,18	2,08	1,98	1,99	2,22	2,74	3,57	4,62	5,33	5,75	5,60	5,01
2,48	2,28	2,21	2,13	2,29	2,62	3,24	4,25	5,46	6,49	7,01	6,87	6,02
2,62	2,49	2,39	2,38	2,50	2,92	3,72	4,93	6,37	7,64	8,29	8,04	6,98
3,00	2,83	2,72	2,68	2,74	3,20	4,11	5,48	7,13	8,56	9,29	8,97	7,71
3,74	3,52	3,19	2,98	2,99	3,39	4,35	5,76	7,46	8,94	9,72	9,41	8,02
5,07	4,73	4,18	3,61	3,34	3,81	4,36	5,69	7,31	8,75	9,47	9,13	7,81
7,14	6,70	5,70	4,60	3,84	3,69	4,48	5,34	6,71	7,95	8,57	8,26	7,12
9,96	9,37	7,78	5,97	4,57	3,93	4,09	4,79	5,83	6,79	7,23	7,22	5,84
13,26	12,43	10,20	7,56	5,42	4,16	3,85	4,19	4,87	5,53	5,82	5,60	4,91
16,44	15,40	12,51	9,11	6,16	4,32	3,65	3,88	4,02	4,38	4,75	4,24	3,79
18,78	17,50	14,15	10,09	6,65	4,48	3,44	3,19	3,29	3,47	3,48	3,27	2,88
19,64	18,25	14,67	10,61	6,71	4,38	3,20	2,81	2,74	2,78	2,71	2,51	2,19
18,78	17,39	13,96	9,84	6,37	4,12	2,96	2,74	2,39	2,36	2,24	2,02	1,72
16,44	15,22	12,24	8,53	5,71	3,71	2,74	2,54	2,17	2,07	1,93	1,70	1,44
13,26	12,32	10,01	7,51	5,01	3,45	2,62	2,47	2,05	1,91	1,77	1,57	1,32
9,96	9,34	7,78	5,92	4,35	3,29	2,67	2,55	2,08	1,89	1,74	1,50	1,28
7,14	6,82	5,97	4,87	4,19	3,31	2,92	2,59	2,28	2,00	1,75	1,51	1,29
5,07	4,96	4,61	4,20	3,87	3,63	3,38	3,05	2,62	2,25	1,89	1,61	1,33
3,74	3,82	3,83	3,92	4,07	4,18	4,06	3,70	3,19	2,60	2,13	1,76	1,42
3,00	3,22	3,55	4,16	4,78	4,95	4,75	4,57	3,90	3,14	2,47	1,94	1,53
2,62	2,92	3,51	4,37	5,32	5,99	6,10	5,60	4,71	3,72	2,87	2,19	1,66
2,48	2,94	3,75	4,94	6,28	7,23	7,35	6,72	5,79	4,31	3,25	2,47	1,80
2,45	3,02	4,09	5,61	7,26	8,36	8,54	7,73	6,32	4,81	3,58	2,62	1,92
2,43	3,16	4,39	6,14	7,98	9,23	9,41	8,49	7,00	5,15	3,74	2,73	2,02
2,38	3,17	4,53	6,37	8,28	9,58	9,74	8,73	7,02	5,25	3,77	2,76	2,07
2,27	3,09	4,40	6,15	8,04	9,31	9,41	8,46	6,98	5,11	3,71	2,77	2,07
2,13	2,87	3,83	5,63	7,24	8,34	8,48	7,69	6,28	4,76	3,53	2,65	2,08
1,93	2,45	3,58	4,95	6,26	7,19	7,35	6,62	5,43	4,15	3,13	2,51	2,09
1,78	2,28	3,03	3,94	4,90	5,59	5,75	5,40	4,61	3,79	3,01	2,44	2,14
1,63	2,00	2,29	3,14	3,79	4,30	4,44	4,22	3,97	3,16	2,67	2,37	2,24
1,50	1,80	2,14	2,53	2,90	3,26	3,34	3,21	2,92	2,56	2,30	2,25	2,43
1,38	1,63	1,86	2,09	2,30	2,46	2,51	2,41	2,21	2,01	1,93	2,18	2,90
1,25	1,48	1,63	1,76	1,90	1,92	1,91	1,80	1,66	1,58	1,71	2,34	3,28
1,14	1,38	1,43	1,45	1,46	1,46	1,42	1,36	1,38	1,48	1,69	2,68	4,43
1,05	1,13	1,19	1,22	1,22	1,20	1,20	1,14	1,08	1,20	1,69	2,82	4,87
1,01	1,01	,98	,96	,96	,94	,93	,94	,99	1,24	1,89	3,26	5,70

*) Die Tabelle enthält das Gebiet in der linken oberen Ecke von Abb. 1 und 3 und

mit der Projektionsebene ($11\bar{2}0$) einen Winkel von nur 34° einschließt. Für die nächstgünstige Verbindungslinie von c nach 1 beträgt dieser Winkel $6^\circ 43'$. Auf der Verbindung $c-2$ hat man daher keinerlei

belle 2

nach der zweizähligen Achse*)

9.30	13.50	17.16	19.01	18.54	16.31	13.57	11.38	10.08	9.48	9.19	9.12
10.21	14.81	18.82	20.85	20.37	18.00	15.36	12.83	11.44	10.58	9.87	9.20
10.41	14.92	18.89	20.96	20.63	18.35	15.78	13.76	12.42	11.54	10.17	9.37
9.68	13.80	17.40	19.30	19.06	17.30	15.27	13.84	12.60	11.84	10.89	9.43
8.36	11.75	14.77	16.39	16.34	15.18	13.90	13.09	12.61	11.95	10.79	9.19
6.77	9.36	11.65	12.96	12.85	12.51	11.96	11.71	11.60	11.11	9.80	8.52
5.23	7.62	8.68	9.67	9.93	9.79	9.73	9.91	10.05	9.72	8.79	7.45
4.04	5.18	6.29	6.97	7.28	7.37	7.84	7.99	8.22	7.95	7.22	6.11
3.30	4.04	4.69	5.07	5.23	5.29	5.61	6.00	6.34	6.33	5.79	5.02
2.82	3.12	3.44	3.66	3.83	4.01	4.28	4.59	4.80	4.70	4.19	3.71
2.83	2.81	2.84	2.87	2.88	2.96	3.08	3.35	3.33	3.26	3.23	2.86
3.09	2.85	2.66	2.41	2.30	2.23	2.28	2.41	2.55	2.59	2.49	2.29
3.58	3.07	2.62	2.27	1.98	1.78	1.71	1.75	1.85	1.97	2.00	1.89
4.45	3.83	2.79	2.29	1.86	1.57	1.36	1.32	1.38	1.49	1.58	1.59
4.85	3.79	2.96	2.33	1.85	1.46	1.15	1.07	1.12	1.16	1.29	1.31
5.54	4.16	3.13	2.39	1.85	1.49	1.15	.98	.90	.94	.98	1.07
5.00	4.40	3.20	2.44	1.85	1.48	1.10	.90	.81	.86	.89	.87
6.16	4.48	3.17	2.36	1.79	1.38	1.07	.85	.75	.80	.82	.70
6.07	4.30	3.14	2.28	1.73	1.30	.98	.80	.69	.66	.66	.59
5.58	4.13	3.02	2.24	1.67	1.21	.84	.67	.62	.58	.57	.51
4.87	3.75	2.84	2.17	1.62	1.17	.77	.55	.47	.47	.48	.42
4.05	3.46	2.60	2.08	1.58	1.10	.70	.48	.35	.34	.35	.32
3.23	2.68	2.28	1.92	1.50	1.04	.69	.37	.20	.17	.19	.20
2.49	2.14	1.89	1.66	1.34	.93	.57	.31	.15	.11	.12	.11
1.87	1.63	1.47	1.32	1.10	.81	.47	.24	.09	.05	.06	.07
1.43	1.22	1.08	.97	.82	.61	.37	.19	.07	.04	.07	.11
1.24	.94	.78	.69	.57	.44	.31	.14	.08	.08	.11	.20
1.05	.80	.61	.48	.38	.30	.20	.16	.10	.13	.22	.32
1.01	.76	.58	.43	.33	.24	.21	.18	.15	.20	.29	.42
1.05	.83	.63	.48	.39	.31	.25	.24	.23	.26	.39	.51
1.13	.90	.72	.59	.50	.45	.41	.36	.36	.38	.46	.59
1.14	.95	.76	.68	.62	.60	.54	.52	.52	.60	.63	.70
1.20	.96	.81	.71	.68	.62	.63	.66	.69	.80	.82	.87
1.25	.97	.82	.72	.69	.69	.72	.74	.85	.95	1.04	1.07
1.27	1.00	.83	.73	.69	.70	.75	.85	1.03	1.14	1.29	1.31
1.41	1.09	.91	.73	.72	.72	.79	.92	1.10	1.31	1.49	1.59
1.51	1.17	.96	.85	.81	.81	.88	1.03	1.23	1.48	1.69	1.89
1.60	1.24	1.14	1.03	.97	.98	1.06	1.22	1.44	1.72	2.02	2.29
1.62	1.40	1.26	1.19	1.16	1.21	1.29	1.47	1.82	2.08	2.46	2.86
1.71	1.50	1.41	1.36	1.39	1.54	1.65	1.95	2.25	2.64	3.12	3.71
1.91	1.82	1.75	1.61	1.63	1.75	1.90	2.37	2.78	3.45	4.11	5.02
2.01	1.93	1.92	1.95	2.04	2.23	2.56	2.97	3.50	4.20	5.00	6.14
2.32	2.63	2.58	2.67	2.74	2.88	3.16	3.56	4.17	5.00	6.09	7.45
2.84	3.08	-3.71	3.92	3.95	3.93	4.03	4.29	4.81	5.73	6.98	8.52
3.65	4.82	5.49	5.92	5.88	5.57	5.23	5.17	5.53	6.35	7.61	9.19
4.82	6.30	8.00	8.74	8.60	7.83	6.93	6.40	6.38	6.93	8.01	9.43
6.87	9.19	12.29	13.28	13.02	11.76	9.90	8.75	7.89	8.15	8.67	9.37
7.84	11.35	14.60	15.89	15.48	13.71	11.42	9.61	8.67	8.43	8.67	9.20
9.30	13.50	17.16	19.01	18.53	16.31	13.57	11.38	10.08	9.48	9.19	9.12

ist gegen diese um 90° gedreht.

störende Effekte durch Projektionsüberlappungen zu erwarten. Man erkennt zwischen diesen beiden Atomen einen ausgesprochenen Sattel in der Elektronendichte, ähnlich wie er seinerzeit im Diamantgitter

auf der Verbindungslinie zweier Kohlenstoffatome gefunden wurde¹⁾, ein Befund, den man im Sinne von homöopolarer Bindung deuten möchte. Eine genaue Analyse des Sattelpunktes zeigt aber, daß hier doch gewisse Unterschiede gegenüber der C-C-Bindung im Diamanten bestehen. Nehmen wir an, daß sowohl die Silizium- wie die Sauerstoffatome kugelsymmetrisch gebaut sind, so können wir auf den

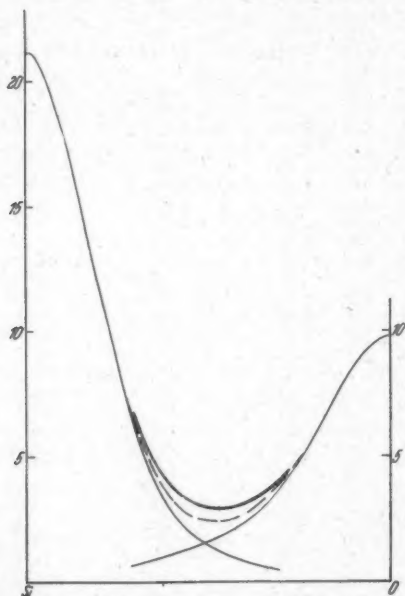


Abb. 4. Abfall der Ladungsprojektion von Si und O (dünne Kurven) sowie ihre Überlagerung (fette Kurve), verglichen mit dem tatsächlichen Übergang Si-O (c - 2 aus Abb. 1; gestrichelte Kurve)

Linien von den Atomschwerpunkten zu einem benachbarten Nullniveau einen Normalabfall der Elektronendichte ermitteln und ihn dann dazu benutzen, um jene Elektronendichte daraus zu berechnen, die vorliegen würde, wenn der Sattelpunkt durch eine Überlagerung des normalen Elektronenabfalls entstünde. Dabei zeigt sich nun, daß die so bestimmte Elektronendichte am Sattelpunkt sicher nicht kleiner ist als die experimentell gefundene Dichte. In Abb. 4 scheint sie sogar merklich höher zu liegen, doch möchten wir angesichts der ungenauen

1) Vgl. Ann. d. Phys., a. a. O.

Definition des „Normalabfalls“ diesen Unterschied nicht als gesichertes Ergebnis hinstellen. Zum Unterschied vom Diamantgitter zeigt der Sattelpunkt zwischen Si- und O-Atom im Quarz also höchstens die Elektronendichte, die man erhält, wenn sich ein kugelsymmetrisch gedachtes Silizium und ein ebensolches Sauerstoffatom bis auf die hier beobachtete Entfernung einander nähern, während beim Diamant die Dichte am Sattelpunkt beträchtlich höher liegt, als einer solchen Superposition entspricht. Wieweit sich hierin ein wesentlicher Unterschied der Bindungsarten von Quarz und Diamant ausdrückt, bleibe bis zur Erforschung von weiterem Material dahingestellt. Jedenfalls muß festgestellt werden, daß eine gegenseitige Durchdringung¹⁾ der Elektronenhüllen zweifellos stattfindet, daß also ein deutlicher Unterschied gegenüber dem Fall der reinen Ionenbindung, wie er beim Steinsalz untersucht wurde, vorhanden ist. Im ganzen entspricht der Befund also einem Übergang zwischen homöopolarer und heteropolarer Bindungsart und damit auch etwa den Verhältnissen, wie sie durch die Molrefraktion des Sauerstoffs im Quarz wiedergegeben werden, die ja auch ein Mittelding zwischen homöopolarer und Ionenbindung darstellt, wobei der gefundene Wert der homöopolaren Bindung noch etwas näher liegt.

Wir können unsere Fourier-Synthese außerdem noch dazu benutzen, um die Atomlagen genau zu bestimmen. Dabei erhalten wir eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Wei (a. a. O.). Die erhaltenen Zahlen sind in Tab. 8 zusammengestellt.

Tabelle 8
Parameter der Atomlagen im Quarz

	Nach der Strukturbestimmung von P. H. Wei	Nach unserer Fouriersynthese
x_{Si}	$,465 \pm 4$	$,465 \pm 3$
x_o	$,417 \pm 10$	$,415 \pm 3$
y_o	$,278 \pm 10$	$,272 \pm 3$
z_o	$,111 \pm 10$	$,120 \pm 2$

Zusammenfassung

Es wird eine Fourier-Synthese der Elektronendichte von Quarz projiziert auf $(11\bar{2}0)$ vorgenommen. Daraus ergibt sich, daß die Elektronendichte auf einer zur Projektionsrichtung fast genau senk-

1) Daß diese Durchdringung allein durch thermische Schwingungen vorgetäuscht wird, halten wir angesichts der vermutlich hohen charakteristischen Temperatur von Quarz für ausgeschlossen.

rechten Verbindungslinie zwischen Si und O nicht, wie es bei einem Ionengitter sein sollte, auf nahezu Null abfällt, sondern nur bis auf 2,25 Elektronen pro \AA^2 . Diese Elektronendichte entspricht einem Ineinandereindringen der Elektronenhüllen von Si und O ohne eine zusätzliche Elektronenanhäufung, wie sie bei dem homöopolar gebundenen Diamant gefunden wurde. Dies macht einen Übergangszustand zwischen homöopolarer und heteropolarer Bindung wahrscheinlich. Ferner stehen unsere Messungen in gutem Einklang mit den von P. H. Wei bestimmten Parametern des Quarzgitters.

Ludwigshafen a. Rh., Forschungslaboratorium Oppau der
I. G. Farbenindustrie A.-G.

(Eingegangen 1. Februar 1942)